

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич  
Должность: врио ректора  
Дата подписания: 23.09.2022 14:27:34  
Уникальный программный ключ:  
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:  
Руководитель ООП:  
Б.Б.Педько  
«*август*» 2017 г.



Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

**Теория функции комплексного переменного**

Направление подготовки  
**03.03.03 Радиоп физика**

Программа подготовки  
«Физика и технология радиоэлектронных приборов и устройств»

Для студентов 2 курса очной формы обучения

Составитель:  
к.ф.-м.н., доцент Кислова И.Л.  
*Кислова*

Тверь 2017

## **I. Аннотация**

### **1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом**

Теория функций комплексного переменного

### **2. Цель и задачи дисциплины**

*Целью* дисциплины является изучение основ теории аналитических функций комплексного переменного и ее приложение к физическим и техническим задачам.

*Задачами* освоения дисциплины являются:

- знакомство с комплексными числами, их свойствами и операциями над комплексными числами;
- изучение основ работы с функциями комплексного переменного;
- описание основных физических представлений, связанных с теорией функций комплексного переменного;
- приобретение студентами навыков решения физических задач с использованием теории функций комплексного переменного.

### **3. Место дисциплины в структуре ООП**

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к дисциплинам базовой части учебного плана. Содержательно она закладывает основы знаний для изучения дисциплин, в процессе освоения которых используются методы теории функций комплексного переменного. Учебная дисциплина непосредственно связана с дисциплинами «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» и «Линейные и нелинейные уравнения физики».

Уровень начальной подготовки обучающегося для успешного освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного»: успешное освоение дисциплины обучающихся основывается на их знаниях в области математического анализа, аналитической геометрии, умения определять вид кривой по ее уравнению, находить производную и первообразную функции

действительного переменного, вычислять определенные и криволинейные интегралы, раскладывать функцию в ряд Тейлора, знать основные свойства рядов.

#### 4. Объем дисциплины:

2 зачетных единицы, 72 академических часа, в том числе

**контактная работа:** лекции – 19 часов, практические занятия – 19 часов;

**самостоятельная работа:** 34 часа.

#### 5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<b>Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)</b>	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине</b>
способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности <b>(ОПК-1)</b>	<b>Владеть:</b> математическим аппаратом, изученным в данном курсе и необходимым для освоения других курсов, а также для дальнейшего совершенствования и развития навыков профессиональной деятельности. <b>Уметь:</b> применять изученные математические методы ТФКП при решении профессиональных задач и задач с практическим содержанием. <b>Знать:</b> понятие комплексного числа, свойства комплексных чисел и основы теории функций комплексного переменного (ТФКП).

#### 6. Форма промежуточной аттестации

Зачет в 4 семестре.

## 7. Язык преподавания русский.

### II. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самосто- ятельная работа (час.)
		Лекции	Практиче- ские занятия	
<p><b>Комплексные числа</b>  Понятие комплексного числа, его модуль и аргумент. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня комплексного числа, формула Муавра. Множество комплексных чисел (<math>\mathbb{C}</math>) как метрическое пространство. Евклидова и сферическая метрики. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана. Сходящиеся последовательности в <math>\mathbb{C}</math> и <math>\bar{\mathbb{C}}</math>. Топологии в <math>\mathbb{C}</math> и <math>\bar{\mathbb{C}}</math> (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).</p>	<b>14</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>8</b>
<p><b>Функции комплексного переменного. Конформные отображения</b>  Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Непрерывность в сферической метрике. Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, континууме, в области.  Дифференцируемость в смысле действительного и комплексного анализа. Моногенные и</p>	<b>14</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>8</b>

<p>голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.</p> <p>Определение конформного отображения в точке и области. Достаточные условия конформности отображения. Основные принципы теории конформных отображений, теорема Римана о конформных отображениях.</p>				
<p><b>Интегралы от функций комплексного переменного</b></p> <p>Криволинейные интегралы в теории функций комплексного переменного. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа. Переход к пределу под знаком интеграла. Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.</p> <p>Интегральная формула Коши. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных. Первообразная от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.</p>	<b>14</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>9</b>
<p><b>Ряды Тейлора и Лорана</b></p> <p>Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.</p> <p>Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда. Действия со степенными рядами, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.</p> <p>Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.</p> <p>Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана. Ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.</p>	<b>16</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>6</b>

Теорема Лиувилля. Внутренняя теорема единственности. Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.				
<b>Изолированные особые точки и вычеты</b> Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка. Бесконечно удаленная точка как особая. Критерии изолированных особых точек. Классификация и критерии изолированной особой точки на бесконечности. Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов. Применения вычетов для нахождения определенных интегралов. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительных функций.	<b>14</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>3</b>
<b>Итого</b>	<b>72</b>	<b>19</b>	<b>19</b>	<b>34</b>

### **III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

- планы практических занятий и методические рекомендации к ним;
- методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов;
- сборники заданий для самоконтроля.

### **IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Наряду с другими дисциплинами учебного плана дисциплина «Теория функций комплексного переменного» участвует в формировании общепрофессиональной компетенции ОПК-1 «Способность к овладению

базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности».

**Форма проведения промежуточного контроля:** студенты, освоившие программу курса «Теория функций комплексного переменного» могут получить зачет по итогам семестровой и полусеместровой рейтинговой аттестации согласно «Положения о рейтинговой системе обучения и оценки качества учебной работы студентов ТвГУ» (протокол №4 от 25 октября 2017 г.). Максимальная сумма баллов, которые можно получить за семестр 100.

Если условия «Положения о рейтинговой системе ...» не выполнены, то зачет сдается согласно «Положения о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) студентов ТвГУ» (протокол №4 от 25 октября 2017 г.).

Шкала оценивания: Максимальная оценка каждого студента по итогам ответа на вопросы и результатам выполнения задания составляет 50 баллов. Она складывается из оценки уровня знаний (максимум 25 баллов), умений (максимум 15 баллов) и владений (максимум 10 баллов).

**1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности общепрофессиональной компетенции ОПК-1 «Способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности»**

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
Начальный <b>владеть</b>	Продемонстрировать навыки решения типовых задач в области комплексных чисел. <i>Пример.</i> Вычислить корни уравнения $z^3 + 64 = 0$ .	1 уровень – в целом дается правильный ход решения, но допущены ошибки и дан неверный ответ (1 балл) 2 уровень – дается правильное решение и получен верный ответ (2 балла)
Начальный <b>уметь</b>	Продемонстрировать умение решать тестовые примеры в	1 уровень – правильно рассмотрено равенство (1 балл)

	<p>области комплексных чисел.  <u>Пример.</u> Изобразить множество на комплексной плоскости <math> z + 5  =  z - 5i </math>.</p>	<p>2 уровень – правильно рассмотрено равенство и получено изображение на комплексной плоскости (2 балла)</p>
Начальный знать	<p>Продemonстрировать знания в области комплексных чисел.  <u>Пример.</u> Дать определение алгебраического корня из комплексного числа и описать способ его нахождения</p>	<p>1 уровень – правильно дает определение алгебраического корня (1 балл)  2 уровень – дает определение алгебраического корня и правильно описывает способ его нахождения (2 балла)</p>
Промежуточный владеть	<p>Продemonстрировать навыки решения типовых задач по определению функции комплексного переменного.  <u>Пример.</u> Найти множество точек, в которых функция <math>v(x, y) = 3xy^2 - x^3 + 7y</math> является гармонической. Выяснить, существует ли аналитическая в некоторой области <math>D</math> функция <math>f(z)</math> (<math>z = x + iy</math>), для которой <math>\text{Im } f(z) = v</math>. Если такая функция <math>f(z)</math> существует, то найти ее.</p>	<p>1 уровень – определено только множество точек, где функция является гармонической (1 балл)  2 уровень – определено только множество точек, где функция является гармонической, и демонстрируются знания по нахождению аналитической функции при известной мнимой (вещественной) части, ошибки в решении, ответ не верный (2 балла)  3 уровень – дается правильное решение и получен верный ответ (3 балла)</p>
Промежуточный уметь	<p>Продemonстрировать умение решать тестовые примеры по вычислению интегралов с функциями комплексного переменного.  <u>Пример.</u> Вычислить интеграл <math>\oint_l \frac{dz}{z^5 - z^3}</math> по замкнутой кривой <math>l:  z + 1  = \frac{1}{2}</math>.</p>	<p>1 уровень – сделана попытка решения без использования интегральной теоремы Коши (1 балл)  2 уровень – правильно использована интегральная формула Коши, в ходе решения допущены некоторые ошибки, ответ получен неверный (2 балла)  3 уровень – дается верный ход решения и получен правильный ответ (3 балла)</p>
Промежуточный знать	<p>Продemonстрировать знания в области разложения функций комплексного переменного в ряды.  <u>Пример.</u> Рассмотреть разложение ФКП в ряд Лорана.</p>	<p>1 уровень – правильно записывает ряд Лорана и условия сходимости (1 балл)  2 уровень – правильно записывает ряд Лорана, условия сходимости и определяет</p>



		<p>коэффициенты разложения для аналитической функции (2 балла)</p> <p>3 уровень – правильно записывает ряд Лорана, условия сходимости и определяет коэффициенты разложения для произвольных случаев (3 балла)</p>
--	--	---

**Список вопросов и заданий проверки уровня сформированности общепрофессиональной компетенции ОПК-1 «Способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности»**

Для оценивания результатов обучения в виде владений предлагается выполнить следующие задания:

1. Найти все значения радикала  $\sqrt{1 + \sqrt[3]{-1}}$ .
2. Найти все значения  $i^{\sin i}$ .
3. Вычислить  $\alpha = e^{\ln 2 + i\pi/2}$  и изобразить точку на плоскости.
4. Вычислить  $\text{sh}(\ln 3 + i\pi)$ .
5. Вывести формулы стереографической проекции и формулу для сферического расстояния. Найти сферическое расстояние между точками 1 и  $\infty$ ,  $i$  и  $-i$ .
6. Написать комплексные параметрические уравнения окружности с данным центром и радиусом, эллипса и гиперболы с фокусами в точках  $\pm 1$  и данными полуосями, параболы  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , отрезка прямой, соединяющей две точки.
7. Является ли функция  $w = ze^{2i\bar{z}}$  голоморфной в начале координат? Доказать голоморфность функций  $\sin z$  и  $\text{ch} z$  на  $\mathbf{C}$ .
8. Восстановить голоморфную функцию по заданной ее реальной части  $u = x^3 - 3x^2y + 2x^2 - 2y^2 + e^x \sin y$ ,  $(x, y) \in \mathbf{C}$ .

9. Методом слоев найти образы верхнего единичного полукруга при преобразованиях  $w = 1/z$ ,  $w = 1/\bar{z}$  и  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ .
10. Найти общий вид мебиусовых преобразований верхней полуплоскости на себя, верхней полуплоскости на единичный круг, единичного круга на себя.
11. Какая часть плоскости сжимается при отображении  $w = \frac{z}{2z-1}$ ? Какая часть плоскости растягивается при отображении  $w = e^{2iz}$ ?
12. Описать схему построения конформного преобразования кругового двуугольника на верхнюю полуплоскость. Единичный круг с разрезом по радиусу отобразить конформно на верхнюю полуплоскость.
13. Область, заключенную между единичной окружностью и окружностью с диаметром  $[0,1] \subset \mathbf{R}$ , отобразить конформно на единичный круг.
14. Найти конформный образ полуполосы  $\Pi = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$  с помощью функций: (а)  $w = \sin z$ ; (б)  $w = \cos z$ ; (в)  $w = \operatorname{tg} z$ .

Для оценивания результатов обучения в виде умений предлагается продемонстрировать следующие навыки решения типичных примеров:

1. Найти область сходимости функционального ряда:

$$2. \quad (\text{а}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2\nu}}{3^{\nu}}; \quad (\text{б}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sin^{\nu}(z); \quad (\text{в}) \sum_{\nu=-1}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\nu}.$$

3. Найти нули и изолированные особые точки функций:

$$4. \quad (\text{а}) \frac{z \cos z}{\sin^2 z}; \quad (\text{б}) \frac{\sin^2 z}{e^z - 1}; \quad (\text{в}) \frac{z^2 - zi}{e^{1/z} + 1}.$$

5. Определить порядки нулей и классифицировать и.о.т.
6. Представить рядами Лорана в проколотой окрестности точки  $z=a$  следующие функции

$$7. \quad (a) \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad a = 1; \quad (б) \frac{z^2}{z^3 + 1}, \quad a = \infty;$$

$$(в) \frac{\sin^2 z}{z}, \quad a = 0; \quad (г) \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2}, \quad a = 0.$$

8. Найти вычеты заданных функций в ее и.о.т., включая точку  $z = \infty$ :

$$9. \quad (a) \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1 - \cos z)^2}; \quad (б) \frac{z}{\operatorname{ch} z - 1};$$

$$(c) z^3 \sin \frac{\pi}{z}; \quad (д) \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}.$$

10. Вычислить с помощью теоремы о вычетах интегралы:

$$a. \quad (a) \oint_{|z|=4} \frac{z}{z+3} e^{1/3z} dz; \quad (б) \oint_{|z+1|=2} \frac{dz}{z \sin z};$$

$$(в) \oint_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz; \quad (г) \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{(2 + \sqrt{z-1}) \sin z}, \quad (\sqrt{z-1}|_{z=0} = i).$$

11. Применяя лемму Жордана, вычислить интегралы:

$$12. \quad (a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 + 5x^2 + 4}; \quad (б) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad 0 < a < b;$$

$$(c) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}; \quad (д) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2 + 4)(x-1)}.$$

13. Вычислить интегралы вида  $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$ :

$$14. \quad (a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}; \quad (б) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - a \sin^2 \varphi}, \quad 0 < a < 1; \quad (г) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2 \cos \varphi)^n}{5 + 4 \cos \varphi} \cos n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots$$

15. Вычислить несобственные интегралы от рациональных функций:

$$16. \quad (a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; \quad (б) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$(в) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1}; \quad (г) \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}.$$

Для оценивания результатов обучения в виде знаний предлагается ответить на следующие вопросы:

1. Дать определение модуля, аргумента комплексного числа.
2. Дать определение алгебраического корня из комплексного числа

3. Дать определение открытого и замкнутого множеств, предельных и граничных точек, границы, замыкания, связности множества, области, компакта, континуума.
4. Дать определение непрерывности ф.к.п. в евклидовой и сферической метриках.
5. Дать определение моногенной и голоморфной функции.
6. Сформулировать условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах.
7. Сформулировать геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.
8. Сформулировать групповое свойство мёбиусовых преобразований.
9. Сформулировать круговое свойство мёбиусовых преобразований
10. Сформулировать теорему о существовании и единственности мёбиусова преобразования, нормированного соответствием трёх пар точек.
11. Сформулировать определение экспоненты, её аналитические свойства.
12. Дать определение логарифма.
13. Сформулировать теорему Римана о конформных отображениях, основные принципы конформных отображений.
14. Сформулировать интегральную теорему Коши-Гурса.
15. Сформулировать интегральную формулу Коши.
16. Сформулировать теорему Морера.
17. Привести формулы Коши для производных голоморфной функции.
18. Сформулировать теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
19. Сформулировать теорему Абеля о степенных рядах.
20. Сформулировать теорему о представлении голоморфной функции степенным рядом.
21. Привести разложения основных элементарных функций в ряды Тейлора.
22. Сформулировать теорему Лиувилля.
23. Сформулировать теорему Лорана.
24. Привести неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

25. Сформулировать внутреннюю теорему единственности.
26. Дать определение изолированной особой точки голоморфной функции, привести их классификацию.
27. Дать определение вычета и привести формулы для вычисления вычетов.
28. Сформулировать теорему Коши о вычетах.
29. Сформулировать теорему о сумме всех вычетов.
30. Сформулировать принцип аргумента.

#### **V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

##### ***а) Основная литература:***

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2009. — 432 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/322>.
2. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И.М. Петрушко [и др.]. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 368 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/526>.

##### ***б) Дополнительная литература:***

1. Пантелеев А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учеб. пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67463>.
2. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной: учебник. - М. : Физматлит, 2010. - 334 с. - [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75710>

#### **VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

Электронные библиотечные системы:

1. ЭБС «ИНФРА-М» <http://www.znaniium.com>
2. ЭБС «Университетская библиотека ОН-ЛАЙН» <http://www.biblioclub.ru>
3. ЭБС «ЛАНЬ» <http://e.lanbook.com>

## **VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

### ***1) Планы практических занятий и методические рекомендации к ним.***

***Практические занятия включают в себя обсуждение вопросов по каждому разделу курса и решение задач по теме занятия.***

#### ***Тема 1. Комплексные числа.***

##### **Вопросы для обсуждения:**

1. Понятие комплексного числа, его модуль и аргумент.
2. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа.
3. Арифметические операции над комплексными числами.
4. Возведение в степень и извлечение корня комплексного числа, формула Муавра.

#### ***Тема 2. Функции комплексного переменного***

##### **Вопросы для обсуждения:**

1. Представление функции комплексного переменного
2. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
3. Условия Коши-Римана. Производная голоморфной функции.
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции.

#### ***Тема 3. Интегралы от функций комплексного переменного***

##### **Вопросы для обсуждения:**

1. Криволинейные интегралы в теории функций комплексного переменного.

2. Определение, свойства, примеры, связь с криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода из курса действительного анализа.
3. Интегральная теорема Коши и её обобщение на многосвязные области.
4. Интегральная формула Коши. Существование производных всех порядков у голоморфных функций.
5. Первообразная от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница.

#### ***Тема 4. Ряды Тейлора и Лорана***

##### **Вопросы для обсуждения:**

1. Последовательности и ряды аналитических функций в области. Теоремы Вейерштрасса о рядах аналитических функций.
2. Степенные ряды. Теорема Абеля и теорема о круге сходимости, формула Коши – Адамара. Локально равномерная сходимость степенного ряда.
3. Теорема о представлении аналитической функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы, единственность разложения.
4. Ряды Лорана, структура области сходимости. Теорема о представлении голоморфной функции рядом Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

#### ***Тема 5. Изолированные особые точки и вычеты***

##### **Вопросы для обсуждения:**

1. Изолированные особые точки голоморфной функции, классификация изолированных особых точек однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, порядок полюса, существенная особая точка.
2. Определение вычета в изолированной особой точке и формулы для вычисления вычетов. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема Коши о вычетах. Теорема о сумме вычетов.

3. Применения вычетов для нахождения определенных интегралов.  
Вычетный метод вычисления интегралов.

4. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов и главных значений интегралов от действительных функций.

## ***2) Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов:***

Самостоятельная работа студентов предполагает:

- обязательное выполнение домашних заданий, предусмотренных практическими занятиями;
- углубленное изучение литературы и решение задач по пройденным темам и по вопросам, дополнительно указанным преподавателем;
- использование материалов рабочей программы для систематизации знаний и подготовке к занятиям и контрольным работам.

### Перечень вопросов для систематизации знаний:

1. Поле комплексных чисел. Векторное, алгебраическое, тригонометрическое и показательное представления комплексного числа. Геометрические свойства комплексных чисел.
2. Формулы стереографической проекции. Расширенная комплексная плоскость. Сходящиеся последовательности в  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$ . Лемма о поперечной сходимости. Критерий Коши, теорема Больцано-Вейерштрасса.
3. Евклидова и сферическая метрики. Топологии в  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$  (открытые и замкнутые множества, предельные и граничные точки, граница, замыкание, дополнение к множеству, связность множества, кривые, области, компакты, континуумы).



4. Функции комплексного переменного, их непрерывность и ограниченность  
Теоремы о непрерывных функциях комплексного переменного на компакте, в области.
5. Моногенные и голоморфные функции (определения, примеры). Условия Коши-Римана в действительной и комплексной формах. Критерии моногенности и голоморфности функции комплексного переменного в точке. Связь голоморфных и гармонических функций.
6. Целые линейные преобразования. Декомпозиция целой линейной функции, её свойства.
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной голоморфной функции. Определения конформного отображения 1-го и 2-го рода. Якобиан конформного отображения. Примеры.
8. Дробно-линейные преобразования, их свойства.
9. Существование и единственность мёбиусова преобразования, нормированного соответствием трёх пар точек.
10. Степенная функция с натуральным показателем.
11. Определение экспоненты, её аналитические свойства. Глобальное обращение, логарифм.
12. Криволинейные интегралы от функции комплексного переменного, их свойства, вычисление. Примеры вычисления интегралов от функции комплексного переменного.
13. Интегральная теорема Коши-Гурса и её обобщение на многосвязные области (с доказательствами).
14. Интегральная формула Коши. Доказательство, обобщение на случай многосвязных областей, следствия.
15. Неопределённый интеграл от ф.к.п. в плоской области и формула Ньютона-Лейбница. Теорема Морера.
16. Существование производных всех порядков у голоморфных функций. Формулы Коши для производных.

17. Поточечная, равномерная, локально-равномерная сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Примеры. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование функциональных рядов. Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций.
18. Теорема Абеля о степенных рядах. Существование радиуса сходимости и методы его вычисления. Формула Коши-Адамара. Локально-равномерная сходимость, почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов.
19. Теорема о представлении голоморфной функции степенным рядом, оценка радиуса сходимости. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора для своей суммы. Неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда.
20. Теорема Лиувилля. Доказательство с её помощью теоремы Гаусса о существовании комплексного корня у любого многочлена, отличного от константы.
21. Ряды Лорана, структура области сходимости. Доказательство теоремы Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
22. Внутренняя теорема единственности (доказательство). Нули голоморфных функций. Факторизация голоморфной функции в окрестности её нуля.
23. Изолированные особые точки голоморфной функции, их классификация. Нахождение порядка полюса. Примеры.
24. Определение вычета и формулы для вычисления вычетов. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычета на бесконечности. Теорема о сумме всех вычетов.
25. Вычетный метод вычисления интегралов. Интегралы от тригонометрических функций. Вычисление несобственных интегралов от рациональных функций. Лемма Жордана и её применения.

### **3) Требования к рейтинг-контролю**

Результаты промежуточной аттестации выставляются на основе текущего контроля успеваемости (рейтинг-контроль, баллы за выполненные практические задания суммируются) и по результатам зачета.

### ***Рейтинг***

1. Первая контрольная точка. Содержание модуля 1: Раздел 1 – 3.

40 баллов, из них 10 – текущая работа, 10 – посещаемость, 20 – контрольная работа. 9-ая неделя.

2. Вторая контрольная точка. Содержание модуля 2: Раздел 4 – 7.

60 баллов, из них 20 – текущая работа, 10 – посещаемость, 30 – контрольная работа. 18-ая неделя

Критерии: работа на каждом практическом занятии – по 5 баллов (текущая работа), правильный ответ на один вопрос контрольной работы – 3 балла.

Программой предусматривается выполнение письменных контрольных работ в качестве форм рубежного контроля в конце каждого модуля. Для подготовки к рубежному контролю предполагается выполнение домашних заданий по каждой пройденной в течение модуля теме и использование банка контрольных вопросов и заданий рабочей программы.

**VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)**

**IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Наименование специальных* помещений	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Лекционная аудитория № 228 (170002 Тверская обл., г. Тверь,	1. Мультимедийный проектор Casio XJ-	Adobe Acrobat Reader DC – бесплатно

Садовый пер., д. 35)	H2650 с потол. крепл. и моториз. экраном. 2. Ноутбук (переносной) 3. Комплект учебной мебели на 68 посадочных мест	Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Google Chrome – бесплатно MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017
----------------------	--	---

### Помещения для самостоятельной работы:

Наименование помещений	Оснащенность помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
<p>Помещение для самостоятельной работы, учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, практики, Компьютерный класс физико-технического факультета. Компьютерная лаборатория робототехнических систем №4а (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Компьютер RAMEC STORM C2D 4600/160Gb/ 256mB/DVD-RW +Монитор LG TFT 17" L1753S-SF – 12 шт</li> <li>2. Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2) Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. экран Lumien 180*180. ноутбук Dell N4050. сумка 15,6", мышь</li> <li>3. Коммутатор D-Link 10/100/1000mbps 16-portr DGS-1016D</li> <li>4. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО</li> <li>5. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО</li> <li>6. Демонстрационное оборудование комплект «LegoMidstormsEV3»</li> <li>7. Комплект учебной мебели</li> </ol>	<p>Adobe Acrobat Reader DC - бесплатно Cadence SPB/OrCAD 16.6 - Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009 Google Chrome - бесплатно Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) - бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Lazarus 1.4.0 - бесплатно Lego MINDSTORM EV3 - бесплатно Mathcad 15 M010 - Акт предоставления прав IC00000027 от 16.09.2011 MATLAB R2012b - Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012 Microsoft Express Studio 4 - бесплатно MiKTeX 2.9 - бесплатно MPICH 64-bit – бесплатно MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK - бесплатно Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017</p>

## Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины (или модуля)

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (или модуля)	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	Раздел IV	Реквизиты «Положения о рейтинговой системе обучения и оценки качества учебной работы студентов ТвГУ» и «Положения о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) студентов ТвГУ»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г.
2.	Раздел IX	Оснащенность аудиторного фонда для проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентов согласно «Справки МТО ООП ...»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г