

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 23.09.2022 14:27:34
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:



Руководитель ООП

Б.Б.Педько

«28»

июня

2022 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Теория колебаний

Направление подготовки

03.03.03 Радиофизика

профиль

Физика и технология радиоэлектронных приборов и устройств

Для студентов

3 курса, очной формы обучения

Составитель: к.ф.-м.н. Макаров В.В.

Тверь, 2022

Аннотация

1. Наименование дисциплины:

Теория колебаний

2. Цели и задачи дисциплины.

Курс обобщает общенаучную подготовку студентов по общей физике, расширяя и углубляя знания раздела механические и электромагнитные колебания и волны, подготавливает к усвоению курсов теоретической физики и специальных курсов по выбранной специализации.

Цели курса – изучить основные закономерности распространения волн различной физической природы в средах с различными свойствами. В курсе обобщается и систематизируется разнообразный теоретический и экспериментальный материал по линейным и нелинейным волновым процессам в однородных изотропных, анизотропных диспергирующих средах, периодических структурах, распространение органических волновых пучков, излучение волн. Необходимость изучения вопросов программы обусловлена активным развитием квантовой, оптической, магнитной электроники, гидро- и кристаллоакустики, физики упругих и ударных волн, мощного лазерного излучения, нелинейной оптики и др.

3. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к вариативным дисциплинам базовой части учебного плана. Требования к «входным» знаниям и уровню начальной подготовки обучающегося для успешного освоения дисциплины включают знание университетского курса общей физики, математического анализа, теории функций комплексного переменного, аналитической геометрии и линейной алгебры, численных методов.

4. Объем дисциплины составляет 3,0 зач.ед., 108 академических часов в том числе контактная работа: лекции 32 час., самостоятельная работа 76 час.

В учебном плане 2014 года набора –

Объем дисциплины составляет 2 зач.ед., 72 академических часов в том числе контактная работа: лекции 32 час., самостоятельная работа 40 час.

5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
--------------------------------	------------------------------------------------------

<p style="text-align: center;">ОПК-1</p> <p>Способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности</p>	<p>Знать: основные законы и примеры опытов, позволяющих проверить законы и их следствия.</p> <p>Уметь: применять законы физики для анализа процессов на качественном уровне; применять законы физики для анализа процессов на количественном уровне; указывать границы (область, условия) применимости научных моделей, законов и теорий; решать количественные и качественные задачи, используя сведения, полученные из графиков, таблиц, схем.</p> <p>Владеть: не предусмотрено.</p>
<p>ПК-3 владением компьютером на уровне опытного пользователя, применению информационных технологий.</p>	<p>Знать: методику поиска и анализа информации в сети Интернет, основные возможности, правила работы со стандартными программными продуктами и требованиями информационной безопасности при решении профессиональных задач; основные приемы работы со специализированным программным обеспечением при проведении теоретических расчетов и обработки экспериментальных данных.</p> <p>Уметь: применять навыки работы с компьютером как со средством управления информацией и решать стандартные задачи профессиональной деятельности, используя основные методы ее получения; применять специализированное программное обеспечение при проведении теоретических расчетов и обработки экспериментальных данных</p> <p>Владеть: базовыми навыками работы с научными и образовательными порталами и применения стандартного программного обеспечения для обработки результатов исследований и представления ее в виде электронных документов, печатных материалов и устных сообщений; электронными средствами отображения наглядной информации получаемой в ходе выполнения практических профессиональных задач.</p>

В учебном плане 2014 года набора только – ОПК-1

6. Форма промежуточной аттестации

Зачет в 7 семестре

7. Язык преподавания русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.

Наименование разделов и тем	Все го	Аудиторные занятия			
		лекции	Се-мин	Сам. раб.	Практи ч
1. Уравнение Максвелла для однородных сред. Уравнения Максвелла в вещественной форме. Векторы в комплексной форме. Уравнения Максвелла в комплексной форме. Преобразования Фурье и групповая скорость. Спектр мощности и автокорреляционные функции.	14	4		10	
2. Плоские волны в однородной среде. Плоские волны. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле. Плоские электромагнитные волны в однородной среде. Поляризация электромагнитных волн. Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела.	14	4		10	
3. Волны в диспергирующих средах. Волновой пакет в диспергирующей среде. Материальные уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн со свободными зарядами.	14	4		10	
4. Распространение волн в анизотропных средах. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах. Распространение плоских волн в кристаллических средах. Распространение электромагнитных волн в гидромагнитных средах.	12	4		8	
5. Электромагнитные волны в прозрачных кристаллах. Оптическая индикатриса. Эллипсоид Френеля. Решение задачи о распространении света в кристалле в произвольной системе координат. Взаимная связь между оптическими поверхностями в кристаллах. Коническая рефракция. Наблюдения оптической анизотропии кристаллов в поляризованном свете.	10	4		6	
6. Электрооптическая модуляция лазерного излучения. Электрооптический эффект. Электрооптическое запаздывание.	8	2		6	

Амплитудная электрооптическая модуляция. Электрооптические модуляторы и дефлекторы.					
7. Взаимодействие света и звука. Рассеяние света звуком. Корпускулярная модель брегговской дифракции света на звуке. Анализ брегговской дифракции света на акустических волнах. Акустооптические дефлекторы.	8	2		6	
8. Распространение волн в присутствии направляющих систем и в волноводах. Волны на поверхности жидкости. Релеевские волны на поверхности изотропных твердых тел. Волноводное распространение в слое. Электромагнитные волны в металлических волноводах. Поток энергии и затухание волн в волноводе. Объемные резонаторы.	10	2		8	
9. Излучение волн. Тепловое возбуждение звука модулированным излучением. Движущийся точечный источник. Источники электромагнитного поля. Интегральные уравнения для вектора Герца.	8	2		6	
10. Нелинейные волны. Простые волны. Нелинейные взаимодействия в простых волнах. Распространение волн, содержащих разрывы. Нелинейные волны в дисперсионной среде. Нелинейные волны в диспергирующей среде. Интенсивные волновые пучки.	10	4		6	
Итого:	108	32		76	0

III. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

- 1. Электронные ресурсы*
- 2. Рекомендации по подготовке к зачету.*
- 3. Практические рекомендации для подготовки к практическим занятиям (семинарам).*
- 4. Практические рекомендации для подготовки к контрольным работам.*
- 5. Вопросы для подготовки к зачету.*
- 6. Теоретическая часть курса.*
- 7. Глоссарий.*
- 8. Методика решения задач по разделам.*
- 9. Требования к рейтинг-контролю.*

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Форма проведения промежуточного контроля: студенты, освоившие программу курса «Теория колебаний» могут получить зачет по итогам семестровой и полусеместровой рейтинговой аттестации согласно «Положения о рейтинговой системе обучения и оценки качества учебной работы студентов ТвГУ» (протокол №4 от 25 октября 2017 г.). Максимальная сумма баллов, которые можно получить за семестр 100.

Если условия «Положения о рейтинговой системе ...» не выполнены, то зачет сдается согласно «Положения о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) студентов ТвГУ» (протокол №4 от 25 октября 2017 г.).

1) Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции ОПК-1 (способность к овладению базовыми знаниями в области математики и естественных наук, их использованию в профессиональной деятельности).

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
Начальный Уметь: применять законы физики для анализа процессов на качественном уровне	Примеры задач. 1. Уравнение Максвелла для однородных сред. Физический смысл. 2. Уравнение Максвелла в комплексной форме.	2. Использует лишь ограниченные знания 3. Удовлетворительно использует знания, но не всегда может получить окончательный результат. 4. Умеет хорошо использовать знания. 5. Свободно использует основные физические представления и законы, получает правильный результат.
Начальный Знать: основные законы и примеры опытов, позволяющих проверить законы и их следствия.	Примеры задач. 1. Преобразования Фурье 2. Групповая скорость	2. Не знает элементарных понятий. 3. Удовлетворительно использует знания, но не всегда может получить окончательный результат. 4. Хорошо знает основные понятия 5. Свободно использует основные физические представления и законы, получает правильный результат.
Начальный Владеть:		

не предусмотрено.		
<p>Промежуточный</p> <p>Уметь: применять законы физики для анализа процессов на количественном уровне; указывать границы (область, условия) применимости научных моделей, законов и теорий; решать количественные и качественные задачи, используя сведения, полученные из графиков, таблиц, схем.</p>	<p>Примеры задач.</p> <p>1. Плоские волны в однородной среде.</p> <p>2. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах.</p>	<p>2. Использует лишь ограниченные знания физических законов.</p> <p>3. Удовлетворительно использует знания физических законов, но не всегда может получить окончательный результат.</p> <p>4. Хорошо знает основные понятия</p> <p>5. Свободно использует основные физические представления и законы, получает правильный результат.</p>
<p>Промежуточный</p> <p>Знать: физические явления, связанные с распространением электромагнитных волн в среде</p>	<p>Примеры задач.</p> <p>1. Плоские электромагнитные волны в однородной среде.</p> <p>2. Поляризация электромагнитных волн.</p>	<p>2. Знает лишь отдельные законы, описывающие переходные процессы</p> <p>3. Удовлетворительно знает физические законы</p> <p>4. Хорошо знает основные законы и физические явления</p> <p>5. Исчерпывающе знает основные законы и явления</p>
<p>Промежуточный</p> <p>Владеть не предусмотрено.</p>		

2) Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции ПК-3 (владением компьютером на уровне опытного пользователя, применению информационных технологий).

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Критерии оценивания компетенции, шкала оценивания
<p>Начальный</p> <p>Уметь: применять навыки работы с компьютером как со средством управления информацией</p>	<p>Примеры задач.</p> <p>1. Материальные уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией.</p> <p>2. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.</p>	<p>2. Использует лишь ограниченные знания</p> <p>3. Удовлетворительно использует знания, но не всегда может получить окончательный результат.</p> <p>4. Умеет хорошо использовать знания в</p>

		области компьютерных технологий. 5. Свободно использует ПО.
Начальный Знать: методику поиска и анализа информации в сети Интернет, основные возможности, правила работы со стандартными программными продуктами	Примеры задач. 1. Методы моделирования распространения электромагнитных волн.	2. Не знает элементарных понятий. 3. Удовлетворительно знает основные методы 4. Хорошо знает основные методы 5. Отлично знает основные методы моделирования
Начальный Владеть: базовыми навыками работы с научными и образовательными порталами и применения стандартного программного обеспечения для обработки результатов исследований	Примеры задач. 1. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн со свободными зарядами. 2. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках.	2. Использует лишь ограниченные знания 3. Удовлетворительно использует знания, но не всегда может получить окончательный результат. 4. Умеет хорошо использовать 5. Отлично умеет пользоваться стандартным ПО
Промежуточный Уметь: применять специализированное программное обеспечение при проведении теоретических расчетов и обработки экспериментальных данных	Примеры задач. 1. Корпускулярная модель брегговской дифракции света на звуке. 2. Анализ брегговской дифракции света на акустических волнах.	2. Использует лишь ограниченные знания. 3. Удовлетворительно использует знания программных продуктов, но не всегда может получить окончательный результат. 4. Умеет хорошо использовать знания 5. Свободно использует знания программных продуктов, получает правильный результат.
Промежуточный Знать: основные приемы работы со специализированным программным обеспечением при проведении теоретических расчетов и обработки экспериментальных данных	Примеры задач. 1. Решение задачи о распространении света в кристалле в произвольной системе координат. 2. Взаимная связь между оптическими поверхностями в кристаллах.	2. Знает лишь отдельные приемы работы 3. Удовлетворительно знает основные приемы работы со спец. ПО. 4. Хорошо знает основные приемы в обработке экспериментальных данных. 5. Исчерпывающе знает основные приемы в обработке экспериментальных

		данных.
<p>Промежуточный</p> <p>Владеть : электронными средствами отображения наглядной информации получаемой в ходе выполнения практических профессиональных задач.</p>	<p>Примеры задач.</p> <p>1. Тепловое возбуждение звука модулированным излучением.</p> <p>2. Движущийся точечный источник.</p> <p>3. Источники электромагнитного поля.</p>	<p>2. Не умеет предоставлять отчетную информацию</p> <p>3. Удовлетворительно предоставляет информацию, полученную в ходе выполнения работы</p> <p>4. Хорошо предоставляет информацию, полученную в ходе выполнения задачи</p> <p>5. Отлично предоставляет информацию, полученную в ходе выполнения задачи</p>

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) Основные источники

1. Колебания, волны, оптика/СаринаМ.П. - Новосиб.: НГТУ, 2015. - 116 с.
<http://znanium.com/catalog/product/546199>
2. Горелик, Г.С. Колебания и волны : Введение в акустику, радиофизику и оптику : учеб. пособие для студентов вузов по направлению подгот. "Прикладная математики и физика" / Горелик, Габриэль Семенович ; Г. С. Горелик ; под ред. С. М. Рытова. - Изд. 3-е. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 655 с
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68389&sr=1
3. Дубнищев Ю. Н. Колебания и волны. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2004, 328 с.
http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=57202&sr=1

б) Дополнительные источники

1. Алдошин Г. Т. Теория линейных и нелинейных колебаний. СПб.: Лань, 2013, 320 с. https://e.lanbook.com/book/4640#book_name

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (или модуля)

1. Научная библиотека ТвГУ – <http://library.tversu.ru/>;
2. Электронная библиотека издательства Лань: <http://e.lanbook.com/>
3. Электронно-библиотечная система Znanium.com:
<http://znanium.com/>
4. Университетская библиотека ONLINE: <http://www.biblioclub.ru/>

5. Сайт издательского дома ЮРАЙТ: <http://www.biblio-online.ru/>

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

1. Электронные ресурсы

- Элементы физики колебаний и волн [Электронный ресурс] : учебное пособие / . — Электрон. текстовые данные. — Новосибирск: Новосибирский государственный аграрный университет, Золотой колос, 2014. — 120 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64831.html>
- Семенихина Д.В. Компьютерный лабораторный практикум по теории колебаний. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д.В. Семенихина. — Электрон. текстовые данные. — Таганрог: Южный федеральный университет, 2015. — 84 с. — 978-5-9275-1815-9. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/68216.html>

2. Рекомендации по подготовке к зачету.

Для подготовки к зачету целесообразно использовать материалы лекций, семинаров, практических занятий, а также рекомендованную учебную и научную литературу.

3. Практические рекомендации для подготовки к практическим занятиям (семинарам)

1. Изучить основную рекомендуемую литературу по данной проблеме.
2. Выделить основные моменты, ключевые положения, рассматриваемые в рамках данной проблемы.
3. Изучить дополнительную рекомендуемую литературу по данной проблеме.
4. Дополнить знания по основным моментам, ключевым положениям, рассматриваемым в рамках данной проблемы.

4. Практические рекомендации для подготовки к контрольным работам

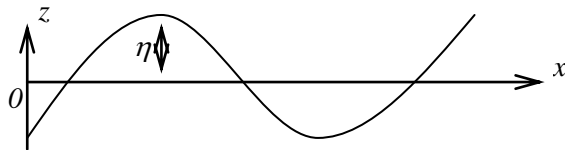
1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Прорешать задачи, разобранные в конспекте.
3. Прорешать задачи, разобранные на практических занятиях.
4. Разобрать задачи, рекомендованные преподавателем для самостоятельного решения.
5. Обсудить проблемы, возникшие при решении задач с преподавателем

5. Вопросы для подготовки к зачету

1. Покажите, что электромагнитные волны могут распространяться внутри полой металлической трубы прямоугольного поперечного сечения, стенки которой полностью проводящие. Каковы групповая и фазовая скорости распространения? Показать, что имеется граничная частота и что электромагнитные волны с частотой меньше граничной не могут распространяться по такому волноводу.
2. Ионосферу можно рассматривать как ионизированную среду, содержащую N свободных электронов в единице объема. Показать, что если линейно поляризованная волна распространяется в ионосфере в направлении, параллельном направлению слабого однородного магнитного поля Земли H , то плоскость поляризации волны будет поворачиваться на угол, пропорциональный пройденному волной расстоянию. Вычислить коэффициент пропорциональности.
3. Полубесконечный диэлектрик, покрытый пленкой толщиной d , помещен в вакуум; на него нормально падает плоская электромагнитная волна. Предполагается, что $\mu=1$ для обеих сред и что пленка и диэлектрик имеют показатели преломления, равные соответственно n_1 и n_2 . Выразить амплитуду отраженной в вакууме волны через показатели преломления n_1 и n_2 и длину волны в вакууме λ . При каких условиях амплитуда отраженной волны обратится в нуль?
4. Опыт Аббе. Решетка Фраунгофера состоит из N параллельных непрозрачных линий, разделенных прозрачными интервалами. Коллиматор, который освещается монохроматическим светом, состоит из бесконечно тонкой щели F , помещенной в фокальной плоскости линзы L_1 . Вторая линза L_2 расположена за решеткой, а в фокальной плоскости изображения помещается фотопластинка. Период решетки $p=10\text{ мкм}$, число линий $N=5000$, длина волны света $\lambda=1,0\text{ мкм}$, $f_1=50\text{ см}$ - фокусное расстояние линзы L_1 ; f_2 - фокусное расстояние линзы L_2 и i - угол, который дифрагированные лучи образуют с нормалью к решетке. Определите значения $\sin i$ для различных изображений, образованных щелью F при условии нормального падения.
5. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda=0,5\text{ мкм}$ приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A , перпендикулярный экрану, и луч S_1BA , отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рис.5). Расстояние L_1 экрана от источника равно 1 м , расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм . Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана - усиление или ослабление

интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A , если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластину стекла ($n=1,55$) толщиной $d=6\text{ мкм}$.

6. Температура воздуха над горизонтальной границей раздела равна 280 К . Внизу воздух имеет температуру $T=300\text{ К}$. Предположим, что появление синусоидальных волн на границе раздела обусловлено гравитационными волнами, длиной волны λ и малой амплитудой. Найти фазовую скорость этих волн, как функцию длины волны λ , считая, что граница раздела расположена достаточно далеко от других возможных границ раздела. Предполагается, что воздух несжимаем.



7. Получить уравнения для амплитуд и фаз волн, взаимодействующих при вынужденном воздействии Мандельштама – Бриллюэна. Световая волна с частотой ω_1 и волновым числом k_1 , рассеиваясь на акустической волне с частотой ω_2 и волновым числом k_2 , образует световую волну с частотой ω_3 и волновым числом k_3 ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, k_1 = k_2 + k_3$).

Формы текущего контроля: проверка понимания ключевых понятий в форме письменного опроса, проверка конспектов лекций, краткий устный (выборочный) контроль.

модуль 1

контрольные вопросы

1. Уравнение Максвелла для однородных сред.
2. Уравнения Максвелла в вещественной форме.
3. Векторы в комплексной форме.
4. Уравнения Максвелла в комплексной форме.
5. Преобразования Фурье и групповая скорость.
6. Спектр мощности и автокорреляционные функции.
7. Плоские волны в однородной среде.
8. Плоские волны. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах.
9. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле.
10. Плоские электромагнитные волны в однородной среде.
11. Поляризация электромагнитных волн.
12. Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела.
13. Волны в диспергирующих средах.
14. Волновой пакет в диспергирующей среде.

15. Материальные уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига.
16. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках.
17. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн со свободными зарядами.

модуль 2

контрольные вопросы

1. Распространение волн в анизотропных средах.
2. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах. Распространение плоских волн в кристаллических средах.
3. Распространение электромагнитных волн в гидромагнитных средах.
4. Электромагнитные волны в прозрачных кристаллах.
5. Оптическая индикатриса.
6. Эллипсоид Френеля.
7. Решение задачи о распространении света в кристалле в произвольной системе координат. Взаимная связь между оптическими поверхностями в кристаллах.
8. Коническая рефракция.
9. Наблюдения оптической анизотропии кристаллов в поляризованном свете.
10. Электрооптическая модуляция лазерного излучения.
11. Электрооптический эффект.
12. Электрооптическое запаздывание.
13. Амплитудная электрооптическая модуляция.
14. Электрооптические модуляторы и дефлекторы.
15. Взаимодействие света и звука.
16. Рассеяние света звуком.
17. Корпускулярная модель брегговской дифракции света на звуке.
18. Анализ брегговской дифракции света на акустических волнах.
19. Акустооптические дефлекторы. Распространение волн в присутствии направляющих систем и в волноводах.
20. Волны на поверхности жидкости.
21. Релеевские волны на поверхности изотропных твердых тел.
22. Волноводное распространение в слое.
23. Электромагнитные волны в металлических волноводах.
24. Поток энергии и затухание волн в волноводе.
25. Объемные резонаторы.
26. Излучение волн.
27. Тепловое возбуждение звука модулированным излучением.
28. Движущийся точечный источник.
29. Источники электромагнитного поля.
30. Интегральные уравнения для вектора Герца.

31. Нелинейные волны.
32. Простые волны.
33. Нелинейные взаимодействия в простых волнах.
34. Распространение волн, содержащих разрывы.
35. Нелинейные волны в дисперсионной среде.
36. Нелинейные волны в диспергирующей среде.
37. Интенсивные волновые пучки.

6. Теоретическая часть курса.

Глава 3. Основы теории волн

3.1. Волновое уравнение для электромагнитных и звуковых волн

Электромагнитные волны

Исходной системой уравнений для ЭМ поля являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

где \mathbf{j} - плотности токов и, ρ - электрических зарядов; \mathbf{E} - напряженности электрического и, \mathbf{H} - магнитного полей; \mathbf{D} - векторы электрической и \mathbf{B} - магнитной индукции; \mathbf{j} и ρ связаны с уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

которое выражает закон сохранения заряда в замкнутом объеме. Уравнения (3.1 - 3.5) дополняются материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

где ε - электрическая, μ - магнитная проницаемость и, σ - проводимость среды. Исключим из системы вектор \mathbf{B} , для чего применим операцию rot к обеим частям уравнения (3.2). Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E},$$

получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.7)$$

Если $\sigma = 0$, то есть среда не обладает проводимостью, то вектор \mathbf{E} удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и вектор \mathbf{H} .

Упругие волны в твердом теле

Пусть положение частицы твердого тела характеризуется вектором $r = r_0 + U$, U - перемещение частицы. Запишем второй закон Ньютона

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F \quad \text{или} \quad \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial a_k}, \quad (3.9.1)$$

где $a_k = x, y, z$ - координаты, σ_{ik} - тензор упругих напряжений. Здесь и далее по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование, то есть в правой части (3.9.1) сила, действующая на частицу среды в направлении оси a_i , определяется производными элемента тензора напряжений по всем трем осям. В свою очередь, упругие напряжения σ_{ik} определяются деформацией среды. Линейный тензор деформаций имеет вид

$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right). \quad (3.9.2)$$

Элементы матрицы U_{ik} с повторяющимися индексами ($i=k$) определяют продольные деформации (деформации сжатия и растяжения), а ($i \neq k$) - поперечные сдвиговые деформации (изгибные деформации). Связь между элементами тензора напряжений и деформаций носит название закона Гука:

$$\sigma_{ik} = k U_{ii} \delta_{ik} + 2\mu \left(U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ii} \right), \quad (3.9.3)$$

где δ_{ik} - символ Кронекера (единичная диагональная матрица $\delta_{ik} = 1$ при $i=k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). Величины k и μ характеризуют упругие свойства твердого тела и носят соответственно названия модуля всестороннего сжатия и модуля сдвига. Подставляя (3.9.3) в (3.9.1), получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_i \partial a_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_k}. \quad (3.9.4)$$

Если направление смещения частиц среды U_i совпадает с направлением распространения волны ξ , из (3.9.4) получим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial \xi^2}. \quad (3.9.5)$$

А если U_i направлено перпендикулярно к ξ , (3.9.4) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_t}{\partial \xi^2}. \quad (3.9.6)$$

Таким образом, мы получили волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн в твердом теле с соответствующими скоростями:

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left(k + \frac{4}{3} \mu \right)}; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}.$$

Заметим, что для продольных и сдвиговых волн всегда выполняется соотношение $c_l > c_t$.

Акустические волны в жидкостях и газах

Для описания движения жидкости или газа используются уравнения для скорости частиц U , плотности ρ и давления P . Они связаны уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U) = 0, \quad (3.10.1)$$

движения (второй закон Ньютона)

$$\rho \left[\frac{dU}{dt} \right] = F = -\bar{\nabla} P + F_{mp} \quad (3.10.2)$$

и состояния

$$P = P(\rho). \quad (3.10.3)$$

В уравнении движения в левой части полная производная скорости по времени может быть переписана в правой части (3.10.2)

$$F_{mp} = \eta \Delta U + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} U. \quad (3.10.4)$$

Этот член описывает внутреннее трение в жидкости и газе и определяется вязкими свойствами среды. ξ, η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости; η и ξ используются при определении тензора вязкого напряжения, аналогичного тензору упругих напряжений в твердом теле (3.9.3). При выводе волнового уравнения внутренним трением можно пренебречь ($\xi, \eta = 0$). Процессы сжатия и расширения в звуковой волне можно считать обратимыми и описывать адиабатическим уравнением состояния

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (3.10.5)$$

Здесь P_0, ρ_0 – равновесные давление и плотность, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. Пусть отклонения величин P, ρ, U от равновесного состояния P_0, ρ_0 и $U_0 = 0$ малы:

$$P = P_0 + P'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad \frac{P'}{P_0} \approx \frac{\rho'}{\rho_0} \approx \mu \ll 1. \quad (3.10.6)$$

Тогда, подставляя (3.10.6) в систему (3.10.1 – 3.10.3) и пренебрегая вязкостью и всеми членами, имеющими порядок μ больше единицы ($\mu^2, \mu^3 \dots = 0$), получим линейную систему:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} U = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = -\bar{\nabla} P; \quad P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \quad (3.10.7)$$

Если в системе (3.10.7) продифференцировать первое уравнение по времени и исключить U , мы приходим к волновому уравнению для возмущения плотности среды:

$$\Delta \rho' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0; \quad c^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (3.10.8)$$

Аналогичные уравнения можно вывести из (3.10.7) для колебательной скорости U и давления P' .

3.2. Решения волнового уравнения и основные характеристики волн

Энергия электромагнитных и упругих волн

Выведем соотношения для энергии электромагнитных и акустических волн.

Для электромагнитных волн такие соотношения могут быть получены из универсальных уравнений Максвелла (3.1–3.4). Для простоты мы будем считать, что среда, в которой распространяются электромагнитные волны, не обладает проводимостью (в ней отсутствуют свободные заряды), и волны распространяются без затухания. С учетом материальных соотношений (3.6) уравнения Максвелла приводятся к следующему виду:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ; \quad (3.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ; \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 ; \quad (3.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 . \quad (3.14)$$

Умножим первое из уравнений (3.11–3.12) на \mathbf{E} , а второе – на \mathbf{H} , а после этого вычтем одно уравнение из другого. В результате получим следующее выражение:

$$\mathbf{E} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] , \quad (3.15)$$

которое можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = 0 . \quad (3.16)$$

Это выражение и представляет собой записанный в дифференциальной форме закон сохранения энергии электромагнитного поля в единице объема. Заметим, что формула (3.16) полностью аналогична уравнению непрерывности (3.5), которое описывает закон сохранения заряда, или уравнению (3.10.1), которое описывает закон сохранения массы. Перепишем (3.16) в соответствующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0 , \quad (3.17)$$

где

$$W = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} ; \quad (3.18)$$

$$\mathbf{S} = \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] . \quad (3.19)$$

Величина W определяет плотность энергии электромагнитного поля в единичном объеме, а вектор \mathbf{S} характеризует энергию, вытекающую из объема за единицу времени. Его называют плотностью потока энергии, или вектором *Умова–Пойнтинга*.

Обе эти величины имеют квадратичную зависимость от напряженности электрического и магнитного полей, а значит, если электромагнитные поля

будут меняться по гармоническому закону, и зависимость энергии волн от частоты будет иметь квадратичный характер.

Пусть

$$\begin{aligned} E &= E(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} ; \\ H &= H(\mathbf{r})e^{\pm i\omega t} . \end{aligned}$$

Тогда, для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении, выражение (3.19) можно преобразовать к виду:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi} \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \epsilon |E|^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{v}W , \quad (3.20)$$

где вектором \mathbf{v} обозначена фазовая скорость электромагнитной волны в среде:

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = |\mathbf{v}| . \quad (3.21)$$

Таким образом, поток энергии, переносимый волной, пропорционален энергии волны в единице объема (энергии колебаний) и скорости распространения волны в среде. Окончательно перепишем (3.17) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}W) = 0 . \quad (3.22)$$

Заметим, что при выводе (3.22) мы не учитывали затухания волн, то есть энергию, которую волна передает среде.

Вывод закона сохранения энергии для упругих (акустических волн) можно провести совершенно аналогично, если использовать исходные уравнения (3.10.1–3.10.3), которые мы использовали ранее для вывода волнового уравнения: уравнение непрерывности (закон сохранения массы), уравнение движения и уравнение состояния:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 ; \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla P ; \quad P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho' . \quad (3.23)$$

Напомним, что при выводе уравнений (3.23) мы пользовались приближением малых амплитуд, то есть считали, что отклонения давления и плотности среды P', ρ' от их равновесного состояния P_0, ρ_0 малы, а колебательная скорость частиц среды \mathbf{U} гораздо меньше скорости распространения волны $c = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$.

Если второе уравнение из (3.23) умножить на \mathbf{U} , то, используя уравнение состояния и учитывая перечисленные ограничения для малых возмущений среды, первое уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' \mathbf{U}) = 0 . \quad (3.24)$$

В дифференциальном законе сохранения энергии акустических волн (3.24) плотность энергии W представляет собой сумму из двух членов:

$$W = \frac{\rho_0 U^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho_0} \rho'^2, \quad (3.25)$$

первый из которых соответствует кинетической энергии колебаний частиц среды, а второй – потенциальной энергии деформации. Безразмерный параметр, который характеризует возмущение среды при прохождении упругой волны и который мы изначально считали малой величиной, можно записать в виде

$$\frac{U}{c} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{c^2 \rho_0} \ll 1. \quad (3.26)$$

Эта величина называется *акустическим числом Маха* и служит критерием линейности (при малых значениях) или нелинейности акустических процессов. В линейном приближении выражение (3.26) позволяет установить связь между избыточным давлением, плотностью, колебательной и фазовой скоростью в акустической волне:

$$P' = c\rho_0 U. \quad (3.27)$$

С учетом (3.27) закон сохранения энергии в дифференциальной форме (3.24) можно привести к окончательному виду:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (3.28)$$

где плотность потока связана с плотностью энергии традиционным образом:

$$\mathbf{S} = cW \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.29)$$

Кроме того, формула (3.27) позволяет получить полную плотность акустической энергии в простейшей форме.

$$W = \rho_0 U^2. \quad (3.30)$$

Заметим, что здесь наблюдается полная аналогия с акустических (упругих) волн электромагнитными волнами любых диапазонов, в том числе и для оптического: как известно, полная энергия светового фотона $E = mc^2$, если рассматривать свет как частицу.

Решения волнового уравнения

Мы получили единое волновое уравнение для плоских волн различной природы, распространяющихся вдоль оси x :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.31)$$

где φ - изменяющаяся по волновым законам величина (переменная плотность, давление или колебательная скорость для звуковой волны, переменное ЭМ поле и т.д.), а c - скорость распространения соответствующей волны в среде.

В сферических координатах, когда волны распространяются симметрично в радиальном направлении (r - радиус),

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \quad (3.32)$$

Если в (3.32) подставить $\varphi = f(r,t)/r$, то для $f(r,t)$ получим уравнение (3.31), то есть решение для сферически симметричной волны отличается только убыванием амплитуды по закону $1/r$. Будем искать решение волнового уравнения (3.31) в виде

$$\varphi = e^{i\omega t} \cdot f(x). \quad (3.33)$$

Подставив (3.33) в (3.31) и исключив экспоненциальный множитель, получим уравнение для $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \quad (3.34)$$

Это уравнение имеет решение $f_0 e^{ikx}$ и $f_0 e^{-ikx}$, описывает пространственную структуру волнового поля. Здесь $k^2 = \omega^2/c^2$ называется волновым числом, ω - круговая или циклическая частота волны, f_0 - амплитуда волны. Таким образом, с учетом (3.33), решение уравнения (3.31) представляется в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\varphi(x,t) = f_0 e^{i(\omega t - kx)} + f_0 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (3.35)$$

Совершенно аналогично, используя подстановку $\varphi(r,t) = f(r,t)e^{i\omega t}$ можно решать и трехмерные волновые уравнения (3.8),(3.10.8). В этом случае получим трехмерное уравнение для волнового поля

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad (3.36)$$

Это уравнение носит название уравнения Гельмгольца и используется для описания неоднородных волновых полей. Далее мы изучим некоторые свойства его решений.

Поглощение и дисперсия

При выводе волнового уравнения для ЭМ поля мы пренебрегли проводимостью среды ($\sigma=0$ в уравнении (3.7), а при выводе уравнения для упругих волн в жидкости - силами вязкого трения ($F_{mp}=0$ в уравнении (3.10.2). С учетом проводимости уравнение для ЭМ волн имеет вид (3.7):

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.37)$$

А уравнение для акустических волн с учетом вязкости получается из системы (3.10.1)–(3.10.3) при $\xi, \eta \neq 0$:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{b}{c^2 \rho_0} \frac{\partial \Delta U}{\partial t} = 0, \quad (3.38)$$

где $b = \xi + \frac{4}{3}\eta$ - диссипативный коэффициент. Учет F_{mp} при выводе (3.38) похож на преобразования тензора упругих напряжений для твердого тела, поэтому коэффициент также зависит от объемного и сдвигового

коэффициента вязкости, как и скорость продольной волны в твердом теле от модуля сжатия и сдвига.

В обоих уравнениях (3.37, 3.38) к волновому уравнению добавляется член с первой производной по времени. Поэтому, подстановка $E, U = f(r, t)e^{i\omega t}$ приводит (3.37, 3.38) к уравнению Гельмгольца с комплексным волновым числом :

$$\Delta f + k^2 f = 0 \quad ; \quad k = k_r + i\delta, \quad (3.39)$$

при этом

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \quad \text{для ЭМ волн,} \quad (3.40)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{b\omega}{c^2\rho} \right)^{-1} ; \quad k \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + i \frac{b\omega}{2c^2\rho} \right) \quad \text{для ЗВ.} \quad (3.41)$$

С учетом теплопроводности уточненное значение

$$b = \xi + \frac{4}{3}\eta + \chi \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right),$$

где χ - коэффициент теплопроводности.

Использование комплексного значения k в решении (3.35) приводит к появлению действительного множителя $e^{-\delta x}$, который отвечает за экспоненциальное пространственное затухание волнового поля. Таким образом, мнимая часть комплексного волнового числа имеет физический смысл декремента затухания, и окончательное выражение для плоской волны, распространяющейся в направлении x , принимает в действительных величинах вид

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 e^{-\delta x} \cos(\omega t \pm kx + \psi_0), \quad (3.42)$$

где ψ_0 - начальная фаза волны. Зависимость волнового числа от частоты волны $k = k(\omega)$ называется дисперсионным соотношением, а среды, в которых эта зависимость носит нелинейный характер (когда скорость $c = c(\omega)$), - диспергирующими.

Поляризация ЭМ волн

Пусть направление распространения плоской ЭМ волны совпадает с осью x . Разложим вектор E в плоскости x, y :

$$E_x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \text{Re } a_1 \exp(-i\omega t - i\varphi_1); \quad (3.43)$$

$$E_y = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \text{Re } a_2 \exp(-i\omega t - i\varphi_2).$$

Здесь $\tau = t - z/c$; a_1, a_2 - амплитуды; φ_1, φ_2 - фазы. Исключив из (3.43) множитель $\exp(-i\omega\tau)$, получим уравнение эллипса:

$$\left(\frac{E_x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \Delta = \sin^2 \Delta ; \quad \Delta = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (3.44)$$

Если $\Delta = \pm \pi/2$, уравнение (3.44) переходит в следующее:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

то есть оси эллипса совпадают с осями координат, а при $a_1 = a_2$ эллипс вырождается в окружность. В случае $\Delta = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, из (3.44) следует

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 \pm \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 0.$$

Это уравнение двух прямых.

Состояние поляризации волны удобно характеризовать множителем поляризации

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} e^{i\Delta}. \quad (3.45)$$

При комплексном P волна имеет эллиптическую или круговую поляризацию, при действительном P - линейную.

3.3. Пространственная структура волнового поля

Отражение плоской волны от границы раздела сред

Пусть на плоскую границу раздела из полупространства ($z > 0$) падает плоская монохроматическая волна с волновым числом k . За границей раздела ($z = 0$) распространяется прошедшая через границу волна с волновым числом k_1 . Решение двумерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

для полупространства $z > 0$ представляется в виде суммы падающей и отраженной волны

$$\varphi_2 = \varphi_0 [\exp(-ikz \cos \theta) + V \exp(ikz \cos \theta)] \exp(ikx \sin \theta), \quad (3.46.1)$$

где V, θ - коэффициент отражения волны и угол падения.

Преломленная волна в нижней среде $z < 0$ запишется в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 W \exp[ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)], \quad (3.46.2)$$

где θ_1, W - угол преломления и коэффициент прохождения (коэффициент прозрачности границы). Волновое поле однородно вдоль оси x , поэтому на границе выполняется условие постоянства горизонтальной составляющей волнового вектора

$$k \sin \theta = k_1 \sin \theta_1. \quad (3.46.3)$$

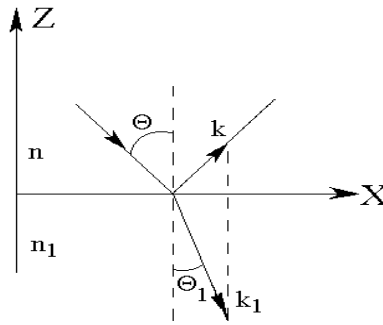


Рис.3.1

Это выражение носит название закона преломления Снелля. В силу этого падающая и прошедшая волна имеют одинаковые зависимости от координаты $k : \exp[ik_x x]$. Следовательно, задача о наклонном падении волны на границу может рассматриваться как задача о нормальном (вертикальном) отражении и прохождении волны с волновым числом $k_z = k \cos \theta$ (см.3.46.1–3.46.2). Из условия непрерывности волнового поля на границе

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Big|_{z=0} \quad (3.46.4)$$

получим связь между коэффициентами прохождения и отражения:

$$1 + V = W, \quad (3.46.5)$$

а при условии непрерывности производной $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$

можно получить их выражения в зависимости от нормальной составляющей волнового числа:

$$V = \frac{k_z - k_{1z}}{k_z + k_{1z}}; W = \frac{2k_z}{k_z + k_{1z}}. \quad (3.46.6)$$

Вместо (3.46.6) на практике часто используются зависимости коэффициентов отражения и прохождения от характеристических импедансов сред:

$$V = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; W = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.46.7)$$

Для ЭМ волн $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, а для акустических - $Z = \rho c$.

Поле в волноводах и резонаторах

Пусть волна распространяется в плоскости x, z между двумя идеально отражающими границами ($z = 0, z = a$). Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.47.1)$$

должно удовлетворять граничным условиям

$$\varphi(x, 0, t) = 0; \varphi(x, a, t) = 0 \quad (3.47.2)$$

Ищем решение в виде $\varphi = \varphi(z)e^{i(\omega t - kx)}$. Для удовлетворения (3.47.2) получим $\varphi(z) = \varphi_0 \sin k_z z; k_z a = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. То есть поле в волноводе имеет

поперечную структуру в виде стоячей волны с волновым числом k_z , когда между стенками волновода "укладывается" целое число полуволн. Подставив решение в (3.47.1) получим характеристическое уравнение

$$-k^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0 \quad (3.47.3)$$

из которого следует

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2} \quad (3.47.4)$$

Если электромагнитная волна распространяется в волноводе без затухания, то волновое число k - действительная величина, а подкоренное выражение в (3.47.4) не должно быть отрицательным. Отсюда вытекает условие $\omega \geq \frac{\pi c}{a} n$.

То есть в волноводе не может распространяться волна с частотой меньшей некоторой частоты ω_0 ($n=1$), которая называется граничной частотой волновода. Этой частоте соответствует максимальная длина волны $\lambda_0 = 2a$. С другой стороны, общее решение волнового уравнения (3.47.1) представляет собой сумму решений

$$\varphi = \sum_n \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n z}{a}\right) \exp[i(\omega t - k_n x)], \quad (3.47.5)$$

где $k_n^2 = \omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2$.

Выражение (3.47.5) называется разложением волнового поля по нормальным волнам, а каждый член ряда часто называют модами волновода. Предположим теперь, что волновое поле однородно вдоль оси x , то есть волны в этом направлении не распространяются, в (3.47.1) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$. Тогда рассмотренная задача определяет одномерный закрытый резонатор, а (3.47.4) при $k=0$ переходит в условие для собственных частот резонатора:

$$\omega_n = \frac{\pi c n}{a}. \quad (3.47.6)$$

Лучевое приближение в теории волн

Если скорость и направление распространения волны в среде зависят от координат, то среда называется неоднородной и пространственное поле монохроматической волны описывается решениями уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + k^2(\mathbf{R})\varphi = 0 \quad \mathbf{R} = (x, y, z). \quad (3.48.1)$$

Будем искать его решение в виде

$$\varphi(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \exp(ik_0 \psi(\mathbf{R})), \quad (3.48.2)$$

где $A(\mathbf{R}), \psi(\mathbf{R})$ - действительные амплитуда и фаза волны. Лучевое или геометрическое приближение предполагает, что в каждой точке траектории луча волна может считаться плоской, другими словами, амплитуда на расстояниях порядка длины волны может считаться постоянной

$$|\text{grad } A| \ll k_0 A,$$

а фаза является линейной функцией координат:

$$\psi(\mathbf{R}) = \mathbf{mR} = m_x x + m_y y + m_z z; \quad \text{grad} \psi = \text{const.}$$

Математически эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$|\text{grad} k| \ll k; \quad |\text{grad} \psi| \ll k_0 \psi. \quad (3.48.3)$$

Будем искать решение уравнения (3.48.1) в виде ряда по степеням $1/k_0$:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \left[A_0(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0} A_1(\mathbf{R}) + \frac{1}{k_0^2} A_2(\mathbf{R}) + \dots \right] \exp[ik_0 \psi(\mathbf{R})]. \quad (3.48.4)$$

Подставляя (3.48.4) в (3.48.1) и приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях $\frac{1}{k_0}$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{k^2(\mathbf{R})}{k_0^2} - (\nabla \psi)^2 \right] A_0 &= 0; \\ A_0 \Delta \psi + 2 \nabla A_0 \nabla \psi &= 0; \\ A_0 \Delta \psi + 2 \nabla A_1 \nabla \psi &= i \Delta A_0. \end{aligned} \quad (3.48.5)$$

Первое и второе уравнение (3.48.5) в лучевом приближении определяют соответственно фазу и амплитуду волны и называются уравнением эйконала и уравнением переноса.

Рассмотрим распространение волн в слоисто-неоднородной среде. Пусть волна распространяется в плоскости x, z и ее скорость неоднородна по одной координате - в уравнении (3.48.1) $k = k(z)$. В этом случае уравнение эйконала (3.48.5) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{k^2(z)}{k_0^2}. \quad (3.48.6)$$

Пусть неоднородная среда занимает полупространство $z > 0$ ($n = 1$ при $z < 0$) и в нее попадает волна под углом θ_0 при $z = 0$ (рис.3.2).

Поскольку среда однородна в направлении x , то вдоль всего луча выполняется соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P_x = \text{const} = n \sin \theta = \sin \theta_0,$$

а уравнение (3.48.6) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = n^2(z) - \sin^2 \theta_0 = n^2(z) \cos^2 \theta(z). \quad (3.48.7)$$

Таким образом, для плоско - слоистой среды уравнение эйконала выражает закон преломления Снелля (3.46.3).

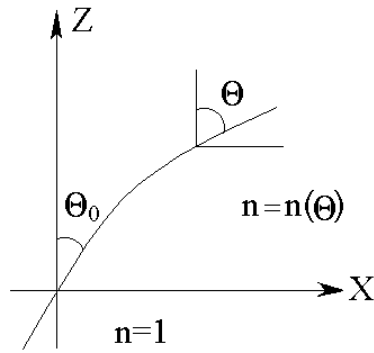


Рис.3.2

Запишем его окончательное решение для фазы волны в виде

$$\psi = x \sin \theta_0 \pm \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz. \quad (3.48.8)$$

Подставив это решение во второе уравнение системы (3.48.5), получим решение уравнения переноса для амплитуды волны вдоль луча:

$$A = [A_0 / \sqrt{n \cos \theta}] = A_0 (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4}. \quad (3.48.9)$$

Знак перед корнем в (3.48.8) определяется направлением распространения волны вдоль луча (в положительном или отрицательном направлении оси z). Окончательно, с учетом (3.48.8–3.48.9) поле в слоистой среде в лучевом приближении может быть записано в виде

$$\varphi(x, z) = [\exp(ik_0 x \sin \theta_0)] f(z),$$

где $f(z)$ является приближенным решением уравнения $f'' + k^2(z)f = 0$.

$$f(z) = \frac{A_0}{(n^2 - \sin^2 \theta_0)^{1/4}} \exp \left[\pm ik_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right]. \quad (3.48.10)$$

Решение (3.48.10) известно также как приближенное решение Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна (ВКБ-приближение), которое в большинстве практических приложений достаточно хорошо описывает волновое поле в слоисто-неоднородной среде.

3.4. Теория излучения

Рассматривая структуру волнового поля в среде, до сих пор мы решали однородное волновое уравнение, то есть мы изучали *распространение* волн, не задаваясь вопросом об их *источниках*. Теперь мы рассмотрим решения волнового уравнения в том случае, когда в некоторой области пространства расположены источники волн.

Сначала проанализируем излучение электромагнитных волн. Пусть источник электромагнитного поля излучает гармонические волны на частоте ω , тогда поле в среде представляется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для того чтобы в среде возникли электромагнитные волны, в некоторой области должны существовать “сторонние” электрические заряды с плотностью $\rho_c(r)$, и эти заряды должны двигаться под действием сторонних сил, создавая токи с плотностью $j_c(r)$. Величины ρ_c, j_c необходимо учесть в уравнениях Максвелла (3.1–3.4), которые с учетом (3.49) приобретают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_c; \quad (3.50)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}; \quad (3.51)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_c; \quad (3.52)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (3.53)$$

Необходимо сразу отметить, что в уравнениях (3.50–3.53) мы для простоты не учитываем собственную проводимость среды ($\sigma, \rho=0$), однако это не ограничивает нашего рассмотрения, поскольку излучение волн в среде с затуханием можно учитывать, используя комплексные значения диэлектрической и магнитной проницаемости ε, μ .

Сторонние токи и заряды связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_c + \operatorname{div} \mathbf{j}_c = 0. \quad (3.54)$$

Из этого уравнения следует, что величины ρ_c, j_c можно выразить через один вектор \mathbf{P} :

$$\rho_c = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{j}_c = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}. \quad (3.56)$$

Учитывая (3.54–3.56), можно показать, что этот вектор характеризует поляризацию сторонних зарядов, служащих источником излучения электромагнитных волн:

$$\mathbf{P} = \int_V (\rho_c \mathbf{r}) dV. \quad (3.57)$$

Например, в простейшем случае дипольного излучения из (3.57) следует, что вектор поляризации равен электрическому моменту диполя. В общем случае эта величина характеризует распределение токов и зарядов в излучающей антенне.

Используя уже известную процедуру, из уравнений Максвелла (3.50–3.53) мы можем получить волновые уравнения для электрического и магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i4\pi \mu \frac{\omega}{c^2} \mathbf{j}_c - i \frac{4\pi}{\omega c} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{j}_c; \quad (3.58)$$

$$\Delta \mathbf{H} + \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}_c. \quad (3.59)$$

Таким образом, мы получили неоднородные волновые уравнения, в правых частях которых стоят некоторые функции от координат и времени $\mathcal{Q}_{1,2}$, которые описывают пространственную структуру источников:

$$\mathcal{Q}_{1,2}(x, y, z) = \mathcal{Q}_{1,2}\{\mathbf{P}(\mathbf{r})\}. \quad (3.60)$$

Совершенно аналогичные уравнения могут быть получены для любого типа волн и любой величины $\varphi(r, t)$, которая меняется по волновым законам в процессе распространения волн.

При выводе (3.58–3.59) мы считаем, что зависимость от времени гармоническая:

$$Q(r, t) = Q(r)e^{\pm i\omega t}, \quad (3.61)$$

поэтому решение волнового уравнения (3.58) или (3.59) для искомой $\varphi(r, t)$ с правой частью (3.61) можно искать в виде

$$\varphi(r, t) = \varphi(r)e^{\pm i\omega t}. \quad (3.62)$$

Если подставить (3.62) в волновое уравнение, то окончательно получим для распределения амплитуды волнового поля в пространстве неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = Q(r). \quad (3.63)$$

Обратим внимание на тот факт, что при распространении плоской волны в направлении r ($\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dr}$) неоднородное уравнение Гельмгольца полностью аналогично уравнению вынужденных колебаний с той разницей, что изменения искомой величины зависят не от времени, а от координаты.

Для определения волнового поля в любой точке пространства, в зависимости от того, какие параметры имеет источник излучения, достаточно решить уравнение (3.63) с известной правой частью.

3.5. Метод Кирхгофа. Функция Грина волнового уравнения

Для решения неоднородного уравнения Гельмгольца (3.63) с произвольной правой частью (с пространственным распределением источников) найдем сначала его решение для “точечного” источника излучения. Такой подход аналогичен тому, как мы искали функцию отклика колебательной системы, воздействуя на нее бесконечно коротким импульсом (δ -функцией). Далее, зная отклик системы на такое воздействие, мы могли легко получить решение для поведения системы под произвольным воздействием (см. п. 2.1). Для задач теории волн такой математический подход является отражением известного в физике *принципа Гюйгенса*: волновое поле в каждой точке пространства является суперпозицией (суммой) волновых полей от точечных источников.

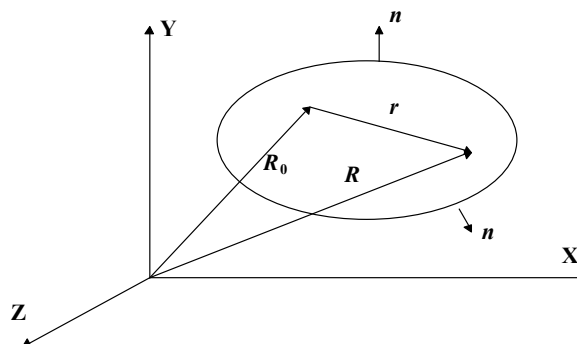


Рис. 3.3

Пусть точечный источник излучения находится в пространстве в точке с радиус-вектором \mathbf{R}_0 (Рис.3.3). Нам необходимо найти волновое поле в точке с текущей координатой \mathbf{R} . В этом случае функция источника задается δ -функцией:

$$Q(\mathbf{R}) = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|), \quad (3.64)$$

а уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|). \quad (3.65)$$

Частным решением такого уравнения является функция

$$G(r) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.66)$$

где $r = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|$. Функцию (3.66) называют *функцией Грина для свободного пространства*, и она описывает поле точечного источника единичной амплитуды. Это частное решение имеет очень большое значение в теории волн, поскольку в любой точке пространства волновое поле можно представить в виде суммы (или интеграла, если источник поля непрерывный):

$$\varphi(\mathbf{R}) = \sum_i A_i \frac{e^{ikr_i}}{r_i}, \quad (3.67)$$

где $r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|$, а $A_i(\mathbf{R}_i)$ - распределение амплитуды по источникам. Вычисление (3.67) - непростая задача, для решения которой используются различные методы, из которых наиболее часто применяется *метод Кирхгофа*.

Метод Кирхгофа основывается на *теореме Грина*, согласно которой непрерывные комплексные функции координат $G(\mathbf{R}), \varphi(\mathbf{R})$ внутри некоторого объема V (см. рис.3.3) могут быть выражены через их значения на поверхности S , ограничивающей этот объем:

$$\int_V (G\Delta\varphi - \varphi\Delta G)dV = \oint_S (G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n})dS. \quad (3.68)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по нормали к поверхности.

Применим эту теорему к волновым полям, которые описываются решениями уравнения Гельмгольца. Пусть функция $\varphi(\mathbf{R})$ пространственная структура распространяющихся волн и удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \quad (3.69)$$

а $G(\mathbf{R})$ - функция Грина свободного пространства (3.66). Используя (3.65) и (3.69) в (3.68), можно получить:

$$4\pi \int_V \varphi(\mathbf{R})\delta(|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)dV_0 = \oint_S (G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n})dS \quad (3.70)$$

или окончательно:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S (G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n})dS. \quad (3.71)$$

Таким образом, *волновое поле в любой точке внутри объема можно получить через значения волнового поля на поверхности, ограничивающей*

этот объем. Формула (3.71) носит название *интегральной теоремы Кирхгофа–Гельмгольца*. Проиллюстрируем возможности ее практического применения.

Прежде всего рассмотрим волновое поле сферически-симметричного источника, для которого $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$. Таким источником может быть, например, пульсирующая сфера, излучающая звук в окружающую среду (рис.3.4). Для функции Грина мы можем записать следующее выражение:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.72)$$

Если использовать (3.72) в интегральной теореме (3.71), то поле в произвольной точке можно рассчитать по формуле

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \varphi \right] \frac{e^{ikr}}{r} dS, \quad (3.73)$$

где, с учетом симметрии, интегрирование по поверхности сферы S можно заменить интегрированием по телесному углу Ω :

$$dS = 4\pi r^2 d\Omega. \quad (3.74)$$

Использование формулы (3.73) с учетом (3.74) позволяет сформулировать общее для всех волновых задач условие убывания волнового поля на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) r = 0. \quad (3.75)$$

Выражение (3.75) называется *условием излучения Зоммерфельда*. Этому условию удовлетворяет поле точечного источника (3.66), и физический смысл которого заключается в том, что волны от любого излучателя конечного размера убывают с расстоянием за счет угловой расходимости излучения.

Применим теперь интегральную теорему (3.73) к анализу акустического излучения пульсирующей сферы радиуса R_0 (рис. 3.4). Пусть нас будет интересовать волновое поле на малом расстоянии от поверхности сферы и длина волны излучения будет меньше размеров сферы. Тогда, при условиях

$$\frac{r}{R_0} \ll 1, \quad kr \gg 1, \quad (3.76)$$

вычисление (3.73) приблизительно дает:

$$\varphi(\mathbf{R}) \approx \varphi(\mathbf{R}_0) e^{ikR}, \quad (3.77)$$

где $\varphi(\mathbf{R}_0)$ - волновое поле на поверхности сферы. Таким образом, вблизи поверхности звук не уменьшается с расстоянием, если радиус кривизны волнового фронта гораздо больше длины звуковой волны (волна почти плоская).

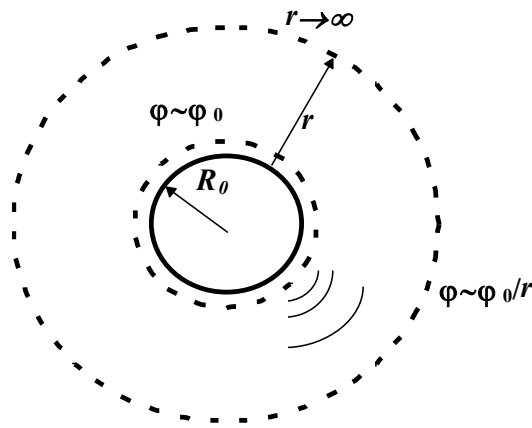


Рис. 3.4

В противоположном случае, когда нас интересует поведение излучения на больших расстояниях

$$\frac{r}{R_0} \gg 1, \quad (3.78)$$

из (3.73) следует, что волновое поле ведет себя как поле точечного источника:

$$\varphi(R) \approx \varphi(R_0) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (3.79)$$

Интегральную теорему Кирхгофа–Гельмгольца можно использовать и в других случаях, например, для расчета дифракции плоской волны на отверстии в экране (см.рис. 3.5).

Пусть плоская волна с волновым числом k падает на экран с отверстием под углом θ . Тогда, если для интегрирования в (3.71) использовать полусферу бесконечного радиуса, как это показано на рис.3.5, с учетом условия излучения (3.75) интегрирование по этому участку поверхности дает нулевой вклад. Если второй частью поверхности считать плоскость экрана, то волновое поле не равно нулю только в области отверстия, поэтому амплитуда волн, прошедших через отверстие в любой точке за экраном, будет определяться интегралом (3.71) по плоскости $Z=0$ в пределах отверстия.

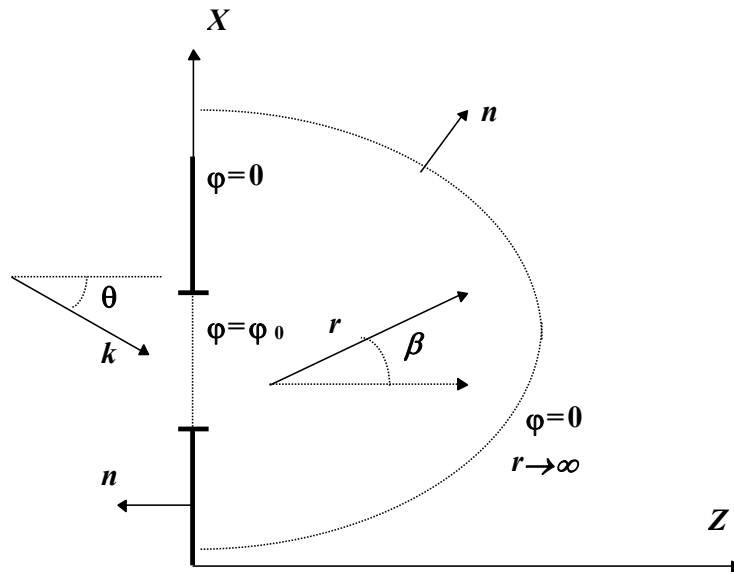


Рис. 3.5

Рассмотрим волновое поле на достаточно большом расстоянии от экрана ($kr \gg 1$). Пусть на экран падает плоская волна

$$U(r) = U_0(x, y, z) \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\}, \quad (3.80)$$

тогда для расчета по формуле (3.71) можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial r}{\partial z} = -\cos\alpha; \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial z} \approx -ik_z U = -ikU \cos\beta; \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = -\left(ik - \frac{1}{r}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos\alpha. \quad (3.83)$$

Здесь мы используем следующие соотношения:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}; \quad (3.84)$$

$$r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}, \quad (3.85)$$

где ζ, η - координаты источников излучения в пределах отверстия в плоскости экрана $Z=0$. Использование соотношений (3.81–3.85) в интегральной теореме (3.71) дает возможность рассчитать поле за экраном в любой, достаточно далеко удаленной точке:

$$U(x, y, z) = \frac{k}{4\pi i} \int_S (\cos\beta - \cos\alpha) U(\zeta, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\eta d\zeta. \quad (3.86)$$

Следовательно, метод Кирхгофа позволяет рассчитать волновые поля с учетом *дифракции*. Результат интегрирования (3.86) рассмотрим в следующем разделе.

3.6. Разложение волнового поля по плоским волнам

Дифракция Френеля и Фраунгофера

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси z и проходящую через отверстие в непрозрачном экране, расположенном в плоскости $z=0$. Пусть $U_0(x,y,0)$ - амплитуда волнового поля в плоскости экрана.

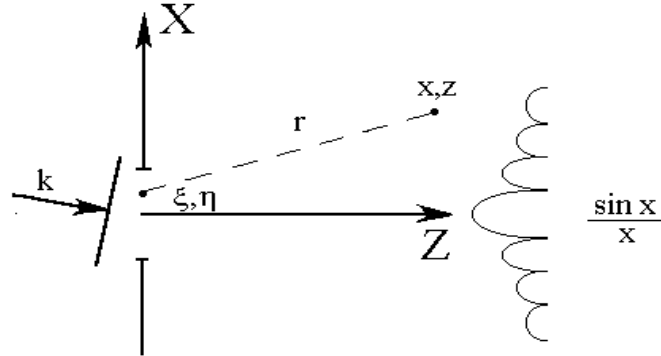


Рис. 3.6

Произведем двумерное Фурье-преобразование функции $U_0(x,y,0)$:

$$U_0(x,y,0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_0(k_x, k_y) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y \quad (3.87.1)$$

где

$$F_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x,y,0) \exp\{-i(k_x x + k_y y)\} dx dy \quad (3.87.2)$$

Функция $F_0(k_x, k_y)$ называется угловым (пространственным) спектром функции $U_0(x,y,0)$. Действительно, подынтегральное выражение в (3.87.1) представляет собой комплексную амплитуду плоской гармонической волны в плоскости $z=0$ с компонентами волнового вектора k_x, k_y и $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ и амплитудой $F_0(k_x, k_y)$.

Пусть плоская волна падает нормально на экран со щелью, ширина которой равна a , а края параллельны оси y (см. рис.3.6). Тогда пространственный спектр волнового поля в плоскости экрана есть

$$\Phi(k_x) = F_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-ik_x x} dx = \frac{\sin(k_x a/2)}{\pi k_x} \quad (3.87.3)$$

Если бы угловой спектр был бы известен при любом z , то волновое поле $U(x,y,z)$ определялось бы выражением (3.87.1) где вместо $F_0(k_x, k_y)$ используется $F_0(k_x, k_y, z)$. Подставив это выражение в уравнение Гельмгольца, получим для $F(k_x, k_y, z)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2)F = 0 \quad (3.87.4)$$

Решая это уравнение при условии $F(k_x, k_y, 0) = F_0(k_x, k_y)$, найдем частное решение, соответствующее волне, распространяющейся в положительном направлении оси z

$$F(k_x, k_y, z) = F_0(k_x, k_y) \exp\left\{i z \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}\right\}. \quad (3.87.5)$$

Угловой спектр по мере удаления точки наблюдения от плоскости экрана меняется.

Пусть ξ, η - координаты точки в плоскости экрана. Будем искать волновое поле $U(x, y, z)$ в точках, лежащих вблизи оси Z , расстояние которых до экрана значительно больше размера отверстия, т.е.

$$\frac{|x - \xi|}{z} \ll 1; \quad \frac{|y - \eta|}{z} \ll 1; \quad R(x, y, z) = z + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z} + \dots \quad (3.87.6)$$

Используя (3.87.6, 3.87.5 и 3.87.1), можно получить выражение для волнового поля $U(x, y, z)$, которое называется приближением Френеля:

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) \iint U(\xi, \eta) \exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}\right) \times \exp[-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta \quad (3.87.7)$$

Здесь λ - длина волны, f_x, f_y - пространственные частоты, которые определяют угол наблюдения к оси z : $f_x = x/\lambda z$; $f_y = y/\lambda z$. Подробный вывод выражения (3.87.7) выходит за рамки настоящего курса.

Большое значение в поведении (3.87.7) имеет волновой параметр $D = \frac{\lambda z}{\pi a^2}$ ($a = \max(\xi, \eta)$). На расстоянии до экрана, соответствующем $D \sim 1$, поле определяется интегралом (3.87.7) и эта область называется областью дифракции Френеля. Область значений $D \gg 1$ называется областью дифракции Фраунгофера. В этой области

$$\exp\left(i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}\right) \approx 1$$

и (3.87.7) преобразуется к виду

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right) (2\pi)^2 F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \quad (3.87.8)$$

где $F_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$ – угловой спектр функции $U_0(\xi, \eta)$.

Таким образом, угловое распределение поля в области дифракции Фраунгофера определяется пространственным спектром поля в плоскости экрана. Например, для щели угловое распределение описывается выражением (3.87.3) и имеет чередующиеся максимумы и минимумы (рис.3.6).

Совершенно аналогично можно рассматривать поля плоского излучателя конечных размеров или волнового пучка (например, лазерного луча) конечного диаметра.

7. Глоссарий:

Колебания являются процессами, повторяющимися через одинаковые промежутки времени (при этом далеко не все повторяющиеся процессы являются колебаниями!). В зависимости от физической природы

повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т.п. При механических колебаниях периодически изменяются положения и координаты тел. При электрических – напряжение и сила тока. В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные колебания, вынужденные, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными (собственными) колебаниями называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити. Для того, чтобы вызвать колебания, надо либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы (например, колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу).

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако, моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой. То есть система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

Параметрические колебания осуществляются при периодическом изменении параметров колеблющейся системы (качающийся на качелях человек периодически поднимает и опускает свой центр тяжести, тем самым меняя параметры системы). При определенных условиях система становится неустойчивой - случайно возникшее отклонение из положения равновесия приводит к возникновению и нарастанию колебаний. Это явление называется параметрическим возбуждением колебаний (т.е. колебания возбуждаются за счет изменения параметров системы), а сами колебания – параметрическими.

Несмотря на разную физическую природу, для колебаний характерны одни и те же закономерности, которые исследуются общими методами. Важной кинематической характеристикой является форма колебаний. Она определяется видом той функции времени, которая описывает изменение той или иной физической величины при колебаниях. Наиболее важными являются такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем *по закону синуса или косинуса*. Они называются *гармоническими*. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам. Во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер очень близких к

гармоническим. Во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение, или суперпозиция, гармонических колебаний.

8. Методика решения задач по разделам

ЗАДАЧА 1

Чему равна амплитуда вынужденных колебаний при резонансе $A_{\text{рез}}$, если при очень малой (по сравнению с собственной) частоте вынужденных колебаний $A_0 = 0,10 \text{ см}$, а логарифмический декремент затухания $\vartheta = 0,01$?

РЕШЕНИЕ

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω вынуждающей силы следующим образом:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad (1)$$

где f - амплитуда вынуждающей силы, ω_0 - собственная частота, δ - коэффициент затухания.

При некотором резонансном ω наступает явление резонанса: амплитуда достигает максимального значения

$$A_{\text{рез}} = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (2)$$

При низких частотах принимаем $A_0 = \frac{f}{\omega_0^2}$.

Подставив значение f в формулу (2) и пренебрегая величиной δ^2 по сравнению с ω_0^2 , получим:

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \approx \frac{A_0\omega_0}{2\delta}. \quad (3)$$

Выразим собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания δ :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \delta = \frac{\vartheta}{T}.$$

Здесь T_0 - период свободных колебаний при отсутствии сопротивления; T - период затухающих колебаний, которые начались бы после прекращения действия вынуждающей силы. Подставив эти значения ω_0 и δ в соотношение (3) и учитывая, что при слабом затухании ($\vartheta \ll 2\pi$) $T \approx T_0$, найдем окончательный ответ:

$$A_{\text{рез}} \approx \frac{\pi A_0}{\vartheta} = 31 \text{ см}.$$

ЗАДАЧА 2

Шар, радиус которого $R = 5 \text{ см}$, подвешен на нити длиной $l_0 = 10 \text{ см}$. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной $l_0 = 10 \text{ см}$.

РЕШЕНИЕ

Шар, висящий на нити, представляет собой физический маятник. Его период T_{Φ} выражается как

$$T_{\Phi} = 2\pi\sqrt{I/mgd} . \quad (1)$$

Если принять маятник за математический, то его период T_M находим как

$$T_M = 2\pi\sqrt{l/g} . \quad (2)$$

Полагая, согласно условию, длину l равной расстоянию от точки подвеса:

$$l = l_0 + R = d . \quad (3)$$

Таким образом, считая маятник математическим, мы заменяем шар материальной точкой, расположенной в его центре, что вызывает некоторую погрешность в вычислении периода.

Учитывая соотношение (3), найдем отношение периода физического маятника к математическому:

$$\frac{T_{\Phi}}{T_M} = \sqrt{\frac{I}{md^2}} . \quad (4)$$

Момент инерции шара относительно оси качаний $I = \frac{2}{5}mR^2 + md^2$. Подставив это значение в (4), получим:

$$\frac{T_{\Phi}}{T_M} = \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5d^2}} = \sqrt{1,044} = 1,022 .$$

Отсюда найдем относительную погрешность в вычислении периода:

$$\frac{\Delta T}{T_{\Phi}} = \frac{T_{\Phi} - T_M}{T_{\Phi}} \approx 0,022 \text{ или } 2,2\% .$$

ЗАДАЧА 3

Определить вынужденные колебания системы с затуханием под влиянием силы $F(t)$, если в начальный момент $t=0$ система покоится в положении равновесия ($x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$).

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Запишем второй закон Ньютона для системы с затуханием, без наличия внешних сил:

$$ma = -kx - hv , \quad (1)$$

где kx – сила упругости, направленная в сторону, противоположную перемещению, hv – сила трения, препятствующая перемещению.

Перепишем уравнение (1) в каноническом виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 . \quad (2)$$

Для решения данной системы запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 . \quad (3)$$

$$D = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} ,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Для удобства записи произведем следующую замену, смысл которой будет пояснён позже: $\gamma = \frac{h}{2m}$, при $h=0$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, поэтому для удобства записи принята следующая замена: $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$.

Тогда (2)–(4) запишутся:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (5)$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Вид решения (5) будет зависеть от типа корней характеристического уравнения (6):

1. Уравнение (6) имеет пару равных действительных корней: $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$ ($\gamma = \omega$).

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (5) запишется в виде

$$x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}.$$

Данное решение описывает некий апериодический затухающий процесс.

2. Уравнение (6) имеет пару действительных корней λ_1, λ_2 ($\gamma > \omega$).

$$x_2(t) = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t}.$$

Данное решение также описывает некий апериодический процесс.

3. Уравнение (6) имеет пару комплексных корней: λ_1, λ_2 ($\gamma < \omega$). Тогда решение (7) переписывается в виде

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_1.$$

Общее решение ДУ (5):

$$x_o(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \quad (8)$$

Упростим это выражение:

$$\begin{aligned} x_o(t) &= C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t = \left| \begin{array}{l} C_1 = A \cos \varphi; \\ C_2 = -A \sin \varphi \end{array} \right| = \\ &= A e^{-\gamma t} (\cos \varphi \cos \omega_1 t - \sin \varphi \sin \omega_1 t) \\ x_o(t) &= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\varphi = -\arctg \frac{C_2}{C_1}$ – фаза колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний.

Как следует из (9), γ показывает степень затухания периодических колебаний, ω_1 является частотой колебаний системы с затухающими колебаниями, ω – частота колебаний системы при отсутствии сил трения. Можно показать, что $\omega_1 < \omega$, для чего достаточно сделать подстановку $\gamma = 0$.

Полученные решения (8) и (9) являются общими решениями уравнения (5) при отсутствии внешних сил. Если же на систему также действует некая сила $F(t)$, то (5) переписывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (10)$$

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом случае решение ДУ (10) будет состоять из общего решения $x_o(t)$ (9) и частного решения $x_q(t)$, вид которого зависит от правой части (10): $x(t) = x_o(t) + x_q(t)$.

1. Пусть $F(t) = F_0 = const$.
2. Пусть $F(t) = at$.
3. Пусть $F(t) = Fe^{-\alpha t} \cos \beta t$.

Частное решение для внешнего воздействия вида $F(t) = F_0 = const$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_q(t) &= A, \\ \dot{x}_q(t) &= 0, \\ \ddot{x}_q(t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Подставив (1.1) в (10), получим:

$$0 + 0 + \omega^2 A = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{m\omega^2}. \quad (1.2)$$

Решение запишется в следующем виде:

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t + \frac{F_0}{m\omega^2}. \quad (1.3)$$

Неизвестные C_1 и C_2 найдем исходя из начальных условий ($x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$).

$$\begin{cases} C_1 - \frac{F_0}{m\omega^2} = 0 \\ -\gamma C_1 + \omega_1 C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{F_0}{m\omega^2} \\ C_2 = \frac{\gamma F_0}{m\omega_1 \omega^2} \end{cases} \quad (1.4)$$

В результате получаем выражение

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left[1 + e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]. \quad (1.5)$$

Частное решение для внешнего воздействия вида $F(t) = at$ будем искать в виде

$$\begin{aligned}x_q(t) &= At + B, \\ \dot{x}_q(t) &= A,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\ddot{x}_q(t) = 0.$$

Подставив (2.1) в (10), получим:

$$0 + 2\gamma A + \omega^2(At + B) = \frac{at}{m}.$$

Приведя члены при t^1 и t^0 , получим:

$$\begin{cases} \omega^2 A = \frac{a}{m} \\ 2\gamma A + \omega^2 B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{m\omega^2}, \\ B = -\frac{2\gamma a}{m\omega^4}. \end{cases}\tag{2.2}$$

Решение ДУ запишется в следующем виде:

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t + \frac{a}{m\omega^2} \left(t - \frac{2\gamma}{\omega^2} \right).\tag{2.3}$$

При $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = 0$ получим

$$\begin{cases} C_1 - \frac{2\gamma a}{m\omega^4} = 0, \\ -\gamma C_1 + \omega_1 C_2 + \frac{a}{m\omega^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2\gamma a}{m\omega^4}, \\ C_2 = \frac{a(2\gamma^2 - \omega^2)}{m\omega_1\omega^4}. \end{cases}\tag{2.4}$$

Таким образом, получим:

$$x(t) = \frac{a}{m\omega^2} \left[t - \frac{2\gamma}{\omega^2} + \frac{e^{-\gamma t}}{\omega^2} \left(2\gamma \cos \omega_1 t + \frac{2\gamma^2 - \omega^2}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].\tag{2.5}$$

Найдём частное решение ДУ при $F(t) = Fe^{-\alpha t} \cos \beta t$, однако следует иметь в виду возможность двух случаев:

1. $\alpha \neq \gamma$ и/или $\beta \neq \omega_1$. В этом случае решение будем искать в виде:

$$\begin{aligned}x_q(t) &= (A \cos \beta t + B \sin \beta t) e^{-\alpha t}; \\ \dot{x}_q(t) &= (-A\beta \sin \beta t + \beta B \cos \beta t) e^{-\alpha t} - \alpha(A \cos \beta t + B \sin \beta t) e^{-\alpha t} = \\ &= [(B\beta - \alpha A) \cos \beta t - (A\beta + \alpha B) \sin \beta t] e^{-\alpha t}; \\ \ddot{x}_q(t) &= [-\beta(B\beta - \alpha A) \sin \beta t - \beta(A\beta + \alpha B) \cos \beta t] e^{-\alpha t} - \\ &- \alpha[(B\beta - \alpha A) \cos \beta t - (A\beta + \alpha B) \sin \beta t] e^{-\alpha t} = \\ &= [-(A\beta^2 + 2\alpha\beta B - \alpha^2 A) \cos \beta t + (\alpha^2 B + 2\alpha\beta A - B\beta^2) \sin \beta t] e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

Подставив полученные значения в (10), сократив на $e^{-\alpha t}$ и приведя члены при $\cos \beta t$ и $\sin \beta t$, получим:

$$\begin{cases} -A\beta^2 - 2\alpha\beta B + \alpha^2 A + 2\gamma(B\beta - \alpha A) + \omega^2 A = \frac{F}{m}, \\ \alpha^2 B + 2\alpha\beta A - B\beta^2 - 2\gamma(A\beta + \alpha B) + \omega^2 B = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)A + 2(\beta\gamma - \alpha\beta)B = \frac{F}{m}, \\ 2(\alpha\beta - \beta\gamma)A + (\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 A - C_2 B = \frac{F}{m}, \\ C_2 A + C_1 B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{C_2}{C_1} A, \\ A = \frac{F}{m} \frac{C_1}{C_1^2 + C_2^2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{m} \frac{C_1}{C_1^2 + C_2^2}, \\ B = -\frac{F}{m} \frac{C_2}{C_1^2 + C_2^2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{m} \frac{\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2}, \\ B = -\frac{F}{m} \frac{2\beta(\alpha - \gamma)}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2}. \end{cases} \\ x_q(t) &= \frac{F}{m} \frac{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)\cos\beta t - 2\beta(\alpha - \gamma)\sin\beta t}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2} e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Тогда решение (10) запишется:

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)\cos\beta t - 2\beta(\alpha - \gamma)\sin\beta t}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2} e^{-\alpha t} + (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) e^{-\gamma t}.$$

Найдём решение при нулевых начальных условиях:

$$\begin{cases} 0 = \frac{F}{m} \frac{\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2} + C_1, \\ 0 = \frac{F - 2\beta^2(\alpha - \gamma) - \alpha(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)}{m(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2} + C_2 \omega_1 - \gamma C_1; \\ \begin{cases} C_1 = -\frac{F}{m} \frac{\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2}, \\ C_2 = \frac{F}{m\omega_1} \frac{(\alpha - \gamma)(\omega^2 + \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)}{(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Тогда решение (10) при нулевых начальных условиях имеет вид

$$x(t) = \frac{F[(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)\cos\beta t - 2\beta(\alpha - \gamma)\sin\beta t]e^{-\alpha t}}{m[(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2]} + \frac{F[(\alpha - \gamma)(\omega^2 + \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)\sin\omega_1 t - \omega_1(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)\cos\omega_1 t]e^{-\gamma t}}{m\omega_1[(\omega^2 - \beta^2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2)^2 + 4\beta^2(\alpha - \gamma)^2]}. \quad 2. \quad \alpha = \gamma \quad \text{и} \quad \beta = \omega_1. \quad \text{В ЭТОМ}$$

случае частное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_q &= t(A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) e^{-\gamma t}; \\ \dot{x}_q &= (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) e^{-\gamma t} + t(-A \omega_1 \sin \omega_1 t + B \omega_1 \cos \omega_1 t) e^{-\gamma t} - \\ &\quad - \gamma t(A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) e^{-\gamma t} = \\ &= [(A + B \omega_1 t - A \gamma t) \cos \omega_1 t + (B - A \omega_1 t - B \gamma t) \sin \omega_1 t] e^{-\gamma t}; \\ \ddot{x}_q &= [(B \omega_1 - A \gamma) \cos \omega_1 t - \omega_1(A + B \omega_1 t - A \gamma t) \sin \omega_1 t - \\ &\quad - (A \omega_1 + B \gamma) \sin \omega_1 t + \omega_1(B - A \omega_1 t - B \gamma t) \cos \omega_1 t] e^{-\gamma t} - \\ &\quad - \gamma [(A + B \omega_1 t - A \gamma t) \cos \omega_1 t + (B - A \omega_1 t - B \gamma t) \sin \omega_1 t] e^{-\gamma t} = \\ &= [(B \omega_1 - A \gamma + B \omega_1 - A \omega_1^2 t - B \gamma \omega_1 t - A \gamma - B \gamma \omega_1 t + A \gamma^2 t) \cos \omega_1 t + \\ &\quad + (-A \omega_1 - B \omega_1^2 t + A \gamma \omega_1 t - A \omega_1 - B \gamma - B \gamma + A \gamma \omega_1 t + B \gamma^2 t) \sin \omega_1 t] e^{-\gamma t} = \\ &= [(A \gamma^2 t - A \omega_1^2 t - 2B \gamma \omega_1 t + 2B \omega_1 - 2A \gamma) \cos \omega_1 t + (B \gamma^2 t - B \omega_1^2 t + 2A \gamma \omega_1 t - 2A \omega_1 - 2B \gamma) \sin \omega_1 t] e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Подставив полученные значения в (10), сократив на $e^{-\gamma t}$ и приведя члены при $\cos \omega_1 t$ и $\sin \omega_1 t$, получим:

$$\begin{cases} A\gamma^2 t - A\omega_1^2 t - 2B\gamma\omega_1 t + 2B\omega_1 - 2A\gamma + 2\gamma(A + B\omega_1 t - A\gamma t) + A\omega^2 t = \frac{F}{m}, \\ B\gamma^2 t - B\omega_1^2 t + 2A\gamma\omega_1 t - 2A\omega_1 - 2B\gamma + 2\gamma(B - A\omega_1 t - B\gamma t) + B\omega^2 t = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\gamma^2 t - A\omega_1^2 t + 2B\omega_1 + A\omega^2 t = \frac{F}{m}, \\ -B\gamma^2 t - B\omega_1^2 t - 2A\omega_1 + B\omega^2 t = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A\gamma^2 - A\omega_1^2 + A\omega^2 = 0, \\ 2B\omega_1 = \frac{F}{m}, \\ -B\gamma^2 - B\omega_1^2 + B\omega^2 = 0, \\ -2A\omega_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } \omega_1^2 = \omega^2 - \gamma^2, \text{ имеем } \begin{cases} B = \frac{F}{2\omega_1 m}, \\ A = 0. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение запишется в виде

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t + \frac{F}{2\omega_1 m} t e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t.$$

При нулевых начальных условиях имеем:

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = -\gamma C_1 - \omega_1 C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, решение в случае наблюдения явления резонанса запишется в виде

$$x(t) = \frac{F t e^{-\gamma t}}{2\omega_1 m} \sin \omega_1 t.$$

ЗАДАЧА 4

В незатухающей бегущей волне задана точка M , отстоящая от источника колебаний на расстоянии $y = \lambda/12$ в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний $A = 0,050$ м. Считая в начальный момент времени смещение точки P , находящейся в источнике, максимальным, определите от положения равновесия точки M для момента $t = T/6$, а также разность фаз колебаний точек M и P .

РЕШЕНИЕ. Смещение точки M можно найти с помощью уравнения бегущей волны

$$x = A \sin[\omega(t - y/c) + \varphi_0]$$

Используя условие задачи, преобразуем это уравнение так, чтобы в него вошли длина волны λ и период колебаний T . Учитывая соотношения $\omega = 2\pi/T$ и $\lambda = cT$, получим:

$$x = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{cT}\right) + \varphi_0\right] = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]. \quad (1)$$

Чтобы найти начальную фазу, воспользуемся начальными условиями задачи: если $t=0, y=0, x=A$. При этих значениях t, y, x из уравнения (1) имеем

$$\sin \varphi_0 = 1,$$

откуда $\varphi_0 = \pi/2$.

Теперь, подставив числовые значения величин $A, t/T, y/\lambda, \varphi_0$ в (1), получим первый ответ:

$$x = 0,050 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 0,050 \cdot 0,87m = 0,044m.$$

Для вычисления разности фаз $\varphi_M - \varphi_P$ колебаний точек M, P учтем, что для точки P координата $y=0$. Следовательно, в любой момент t фаза точки P , т.е. аргумент синуса в (1), равна $2\pi t/T + \varphi_0$.

Тогда

$$\varphi_M - \varphi_P = \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] - \left[2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right] = -2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (2)$$

Подставив в (2) числовое значение отношения y/λ , найдем:

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi \cdot (1/12) = -\pi/6.$$

Таким образом, колебания точки M отстают по фазе от колебаний источника на угол $\pi/6$.

ЗАДАЧА 5

Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v=15m/c$. Период T колебаний точек шнура равен $1,2c$, а амплитуда $A=2cm$. Определить: 1) длину волны λ ; 2) фазу φ колебаний, смещение ξ , скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ точки, отстоящей на расстоянии $x=45m$ от источника волн в момент $t=4c$; 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1=20m$ и $x_2=30m$.

РЕШЕНИЕ.

1. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и может быть найдена из соотношения $\lambda = vT$. Подставив значения величин v и T , получим $\lambda = 18m$.

2. Известно, что

$$\xi = A \cos \omega(t - x/v), \quad (1)$$

где ξ - смещение колеблющейся точки;

x - расстояние точки от источника волн;

v - скорость распространения волн.

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega(t - x/v), \text{ или } \varphi = \frac{2\pi}{T}(t - x/v).$$

Произведя вычисления, получим $\varphi = 5,24rad$, или $\varphi = 300^\circ$. Смещение точки определим, подставив в (1) значение амплитуды A и фазы φ . После подстановки получим, что $\xi = 1cm$.

Скорость точки $\dot{\xi}$ найдем, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin \omega(t - x/v) = -\frac{2\pi}{T} A \sin \omega(t - x/v) = \frac{2\pi A}{T} \sin \varphi .$$

После подстановки данных получим $\dot{\xi} = 9 \text{ см/с}$.

Ускорение – первая производная от скорости по времени, поэтому

$$\ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega(t - x/v) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cos \varphi .$$

Произведя вычисления по полученной формуле, найдем $\ddot{\xi} = 27.4 \text{ см/с}^2$.

3. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)\Delta x = (2\pi/\lambda)(x_2 - x_1).$$

Подставив значения величин λ, x_1, x_2 , получим $\Delta\varphi = 3.49 \text{ рад}$ или $\Delta\varphi = 200^\circ$.

ЗАДАЧА 6

Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса R , помещенного в вакуум.

РЕШЕНИЕ.

Так как радиальные колебания продольные, то $\text{rot } U = 0$. Следовательно, скорость колебаний частиц шара U можно представить в виде $U = \nabla\varphi$. Тогда потенциал скорости φ будет удовлетворять волновому $\ddot{\varphi} = c_l^2 \Delta\varphi$. Для радиальных монохроматических колебаний это уравнение примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{\omega^2}{c_l^2} \varphi.$$

Решением этого уравнения будет

$$\varphi = A \frac{\sin kr}{r} e^{i\omega t}.$$

Граничное условие $\sigma_n(R) = 0$ (равенство нулю нормального напряжения на поверхности шара) дает:

$$\frac{\text{tg } \frac{\omega R}{c_l}}{\frac{\omega R}{c_l}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega R}{2c_l} \right)^2}.$$

Корни этого уравнения определяют собственные частоты колебаний упругого шара.

ЗАДАЧА 7

Составить волновое уравнение и найти дисперсионное уравнение для звуковых волн, излучаемых источником звука, движущимся с постоянной скоростью V_0 относительно жидкости (газа). Найти частоту, воспринимаемую относительно жидкости (газа) приемником звука.

РЕШЕНИЕ.

Указание: следует перейти в систему координат, связанную с источником звука. В этой системе координат поле скоростей имеет вид $V = V_0 + V'$. Тогда волновое уравнение получаем из уравнения движения

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + (V_0 \nabla) V' = -\frac{\nabla p'}{\rho_0},$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (V_0 \nabla) \rho' + \rho_0 \operatorname{div} V' = 0$$

и термодинамического уравнения $p = p(\rho)$, связывающего давление с плотностью.

Из волнового уравнения следует дисперсионное уравнение, которое имеет вид:

$$(\omega - \mathbf{k} V_0)^2 = c^2 k^2,$$

где $c^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0^2$ - квадрат скорости звука.

Частота, воспринимаемая приемником звука,

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{V_0}{c} \cos \theta\right)^{-1},$$

где θ - угол между векторами \mathbf{k} и V_0 , ω - частота, излучаемая движущимся источником.

ЗАДАЧА 8

На пружине жесткости s подвешен однородный стержень длины l . Найти собственные частоты и формы продольных колебаний стержня. Площадь поперечного сечения стержня S , плотность материала ρ , модуль Юнга E . Массой пружины и силами трения пренебречь.
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Сила тяжести вызовет статическую деформацию стержня и пружины. Это деформированное состояние и есть положение равновесия, около которого происходят продольные колебания. Смещение по вертикальной оси Ox от положения равновесия обозначим $u(x, t)$. Уравнение продольных колебаний имеет вид:

$$ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Граничное условие при $x = 0$ получено из равенства нулю суммы силы, $cu(0, t)$, действующей на пружину, и силы, действующей на верхнее сечение стержня $ES \frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$:

$$-ES \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + cu(0, t) = 0.$$

При $x = l$ сила растяжения равна нулю, так как этот конец свободен

$$ES \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

РЕШЕНИЕ.

Так как $u(x,t) = U(x)\cos(\omega t + \alpha)$, тогда

$$\begin{aligned} -\frac{d^2U(x)}{dx^2} + k^2U(x) &= 0, \\ -\frac{dU(0)}{dx} + \frac{\chi}{l}U(0) &= 0, \\ \frac{dU(l)}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k = \omega/a$ - волновое число, $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - фазовая скорость, $\chi = \frac{c}{ES/l}$ отношение силы жесткости пружины к силе упругости стержня при единичном их удлинении. Подставив $U(x) = B_1 \cos kx + B_2 \sin kx$ в краевые условия, получим

$$\begin{cases} \chi B_1 - kB_2 = 0, \\ -kl \sin kl B_1 + kl \cos kl B_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда частотное уравнение

$$kl(kl \sin kl - \chi \cos kl) = 0$$

Корень $kl = 0$ приводит к тривиальному решению $U(x) = 0$ и его можно отбросить. Частотное уравнение удобно представить в виде

$$\operatorname{ctg} z = \frac{z}{\chi} \quad (3)$$

где $z = kl$.

Трансцендентное уравнение (3) имеет бесконечное множество корней $z_n, n = 1, 2, \dots, \infty$ каждый из которых согласно (1) определяет одну из собственных частот $\omega_n = \frac{z_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Выражая из (2) коэффициент B_2 через B_1 , получим n -ю собственную форму колебаний

$$U_n(x) = \frac{\cos k_n(l-x)}{\cos k_n l}.$$

Если сделать замену переменных $l-x = \xi$, то

$$U_n(\xi) = \cos k_n \xi. \quad (4)$$

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ.

Корни уравнения (3) есть абсциссы точек пересечения функции $\operatorname{ctg} z$ с лучом z/χ .

Видно, что $0 \leq z_1 \leq \pi/2$; $\pi \leq z_2 \leq 3\pi/2$ и т.д. Вообще,

$$(n-1)\pi \leq z_n \leq \frac{2n-1}{2}\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (5)$$

при

$$z_n \gg \chi, \quad z_n \approx (n-1)\pi.$$

Координаты узлов собственной формы определены условием $\cos k_n \xi_i = 0$ или $\xi_i = \frac{2i-1}{2} \frac{\pi}{k_n}$, i – номер узла. Так как $0 < \xi_i < l$, то $0 < \frac{2i-1}{2} < \frac{z_n}{\pi}$.

Отсюда число узлов n -й собственной формы

$$\frac{1}{2} < i < \frac{z_n}{\pi} + \frac{1}{2},$$

где i – целое. В частности, при $n=1$ $z_n < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{2} < i < 1$ узлов нет; при $n=2$ $\frac{1}{2} < i < 2$ один узел. Для n -го тона число узлов равно $n-1$.

Из (4) и (5) следует, что при $z_n \gg \chi$, т.е. при больших n , форма собственных колебаний близка к форме для стержня со свободными концами. Действительно, с увеличением ω_n и k_n растет амплитуда продольных сил упругости в стержне, так как $ES \frac{\partial u}{\partial x} \sim ku$, тогда как сила жесткости пружины не зависит от частоты. Поэтому условие при $x=0$ близко к граничному условию свободного конца, на котором смещение максимально.

С уменьшением жесткости пружины c собственные частоты падают, это соответствует повороту луча против часовой стрелки. В основном уменьшаются низкие частоты, высшие – практически не меняются. Для $\chi=0$ корни достигают нижней границы, определяемой (5). В этом случае $\omega_1 = 0$, что соответствует движению стержня без деформации как свободного тела. Частоты $\omega_n, n=2,3,\dots,\infty$ совпадают с собственными частотами стержня со свободными концами.

$$\omega_n = \frac{(n-1)\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n=2,3,\dots \quad (6)$$

При $\chi \ll 1$ первую частоту можно найти приближенно, разлагая $\text{ctg}(z)$ в ряд, так как $z_1 < 1$. Из уравнения (3) следует, что $1/z_1 \approx z_1/\chi$. Отсюда $z_1 \approx \sqrt{\frac{cl}{ES}}$ и $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{c}{\rho l S}}$. Таким образом, на первой частоте деформацией стержня можно пренебречь и движение практически может быть сведено к колебанию сосредоточенного тела массы $\rho l S$ на пружине жесткостью c . С увеличением c корни z_n стремятся к своим верхним границам, $z_n \approx \frac{2n-1}{2} \pi$; ω_n – к собственным частотам стержня, у которого один конец жестко закреплен, а другой свободен:

$$\omega_n = \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n=1,2,\dots,\infty \quad (7)$$

Собственные формы

$$U_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2l} \pi \frac{x}{l}\right). \quad (8)$$

ЗАДАЧА 9

Узкая труба длиной l с одной стороны закрыта поршнем массой m_0 , с другой – сосудом объема V . Стенки сосуда и трубы абсолютно жесткие. Найти собственные частоты колебаний воздуха в трубе, полагая процессы адиабатическими. Равновесное давление воздуха в системе p_0 плотностью ρ_0 ; масса воздуха в сосуде M , в трубе – m . Известно, что $\lambda \gg d$ и $\lambda \gg \sqrt[3]{V}$, где d – диаметр трубы, λ – длина волны.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Поскольку длина волны много больше диаметра трубы, можно считать, что волны, распространяющиеся в трубе, плоские. «Малые» размеры сосуда позволяют допустить, что в нем мгновенно устанавливаются давление и плотность, т.е. не учитывать распространения волн в сосуде.

Линеаризованное уравнение акустических колебаний воздуха в трубе запишем для давления $p(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l,$$

где $a = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$ – скорость звука в воздухе, γ – показатель адиабаты.

На левом конце $x=0$ сумма силы давления на воздух и силы, действующей на поршень,

$$p(0,t)S + m_0 \frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где S – площадь поперечного сечения трубы, $v(x,t)$ – скорость частиц в сечении x .

На правом конце $x=l$ запишем закон сохранения количества газа. Масса воздуха, вышедшего из трубы, равна увеличению его массы в сосуде:

$$\rho_0 v(l,t)S = V \frac{\partial \rho(l,t)}{\partial t}. \quad (2)$$

В этом уравнении слева отброшены члены второго порядка малости, пропорциональные $\frac{\partial \rho}{\partial x} v(l,t)dx$.

Чтобы получить граничные условия, необходимо соотношения (1) и (2) записать для давлений $p(0,t)$ и $p(l,t)$. Для этого воспользуемся линеаризованным уравнением движения частиц

$$\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

и уравнением адиабатического процесса

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (4)$$

Из (1) и (3) найдем при $x = 0$

$$\rho(0,t) - \frac{m_0}{S\rho_0} \frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Для граничного условия при $x = l$ определим из (4)

$$\frac{\partial p(l,t)}{\partial x} + \frac{M}{S\rho_0\gamma} \frac{\partial^2 p(l,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

РЕШЕНИЕ.

Подставим $p(x,t) = P(x)\cos(\omega t + \alpha)$ в уравнение колебаний и условия (5), (6)

$$\begin{cases} \frac{d^2 P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0, \\ P(0) - \frac{m_0}{m} l \frac{dP(0)}{dx} = 0, \\ \frac{dP(l)}{dx} - \frac{M}{m} k^2 l P(l) = 0, \quad k = \frac{\omega}{a}. \end{cases} \quad (7)$$

Возьмем $P(x) = B_1 \cos kx + B_2 \sin kx$, тогда получим

$$\begin{cases} B_1 - \frac{m_0}{m} kl B_2 = 0, \\ \left(-\frac{M}{m}(kl)^2 \cos kl - kl \sin kl\right) B_1 + \left(-\frac{M}{m}(kl)^2 \sin kl + kl \cos kl\right) B_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Частотное уравнение

$$\operatorname{ctgz} = \frac{\frac{m_0 + M}{m} z}{1 - \frac{Mm_0}{m^2} z^2}, \quad (9)$$

где $z_n = k_n l$ – корни уравнения. Распределение амплитуды колебаний давления

$$P_n(x) = \sin k_n x + \frac{m_0}{m} k_n l \cos k_n x. \quad (10)$$

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ.

1. Если $M = 0$, что соответствует жесткой стенке на правом конце трубы, уравнение (9) переходит в

$$\operatorname{ctgz} = \frac{m_0}{m} z, \quad (11)$$

$(n-1)\pi < z_n < \frac{2n-1}{2}\pi$ – корни уравнения.

Собственные формы $P_n(x) = \cos k_n(l-x)/\sin k_n l$.

При $\frac{m_0}{m} \gg 1$ в случае «тяжелого» поршня для первого корня уравнения (11)

можно записать:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{m_0}{m} z_1.$$

Отсюда $\omega_1 \approx \sqrt{\gamma p_0 S / m_0 l}$ – частота колебаний поршня массы m_0 на невесомой «воздушной» пружине жесткости $\gamma p_0 S / m_0 l$.

При $m_0 \rightarrow \infty$ (в случае неподвижной стенки на левом конце) частотное уравнение будет $\operatorname{tgz} = 0$. Частоты колебаний воздуха в трубе с закрытыми концами

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Амплитуда давления $P_n(x) = B_n \cos k_n x$ максимальна на концах трубы. При $m_0 = 0$ (в случае открытого левого конца трубы)

$$\operatorname{ctgz} = 0, \quad \omega_n = \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}},$$

$$P_n(x) = \sin k_n x.$$

2. Если $M \rightarrow \infty$, что соответствует открытому концу трубы справа, то $\operatorname{tgz} = -\frac{m_0}{m} z$ – частотное уравнение.

$$\frac{2n-1}{2} \pi < z_n < n\pi \text{ -- его корни.}$$

Форма колебаний

$$P_n(x) = \frac{\sin k_n (l-x)}{\cos k_n l}.$$

При $m_0 = 0$ (в случае трубы открытой с двух сторон) частоты определены выражением (11). Еще одно значение $\omega_0 = 0$ соответствует равномерному протеканию воздуха через трубу, открытую с двух сторон:

$$P_n(x) = \sin k_n x, \quad n \neq 0.$$

ЗАДАЧА 10

Два жестких стержня массой m и длиной l соединены идеальным шарниром и подвешены на трех пружинах, жесткости которых равны (рис.1). Определить частоты и формы собственных вертикальных колебаний в этой системе.

РЕШЕНИЕ.

Выберем в качестве обобщенных координат величины x_1, x_2, x_3 – вертикальные смещения концов стержней из положения статического равновесия. Записать уравнения движения в этих координатах сразу не так просто.

Кинетическую энергию стержней, движущихся в вертикальной плоскости, можно сложить из энергии поступательного движения центров масс и энергии вращательного движения около осей, проходящих через центры масс:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\Theta}_2^2.$$

Здесь $z_{1,2}$ - координаты центров масс стержней; $\Theta_{1,2}$ - углы поворота стержней в вертикальной плоскости; I_0 - момент инерции стержней относительно оси, проходящей через центр масс.

Потенциальная энергия – энергия деформированных пружин –

$$U = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 + \frac{1}{2}cx_3^2.$$

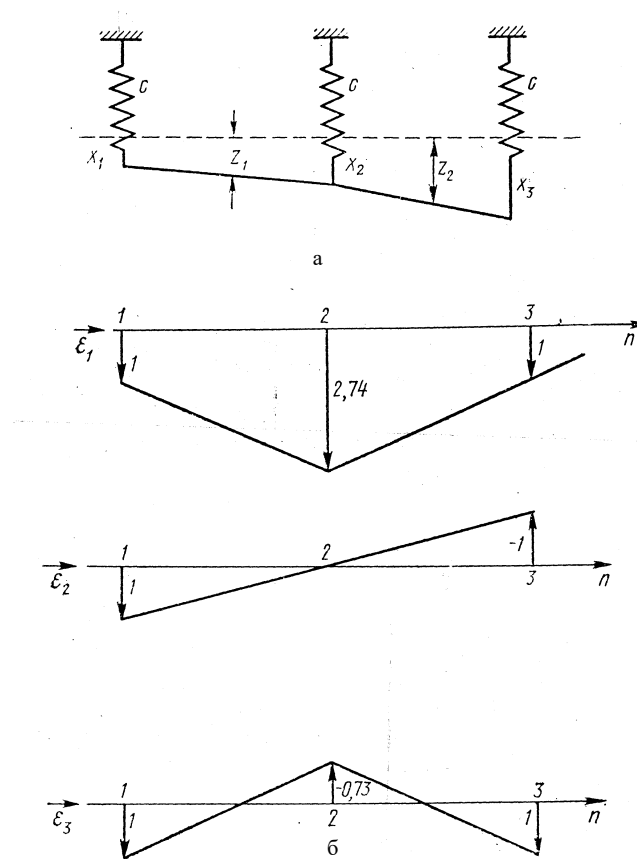


Рис.1

Преобразуем кинетическую энергию к координатам x_1, x_2, x_3 , используя очевидные соотношения

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \Theta_1 = \frac{1}{l}(x_1 - x_2);$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \quad \Theta_2 = \frac{1}{l}(x_2 - x_3).$$

В итоге кинетическую энергию запишем как

$$T = \frac{m}{2} \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^3}{4} + \frac{I_0}{2} \frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{l^2} + \frac{m}{2} \frac{(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2}{4} + \frac{I_0}{2} \frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2}{l^2}.$$

ТЕОРИЯ И ОБЪЯСНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ. Всякий процесс в системе с сосредоточенными параметрами можно описать изменением во времени N независимых обобщенных координат: x_1, x_2, \dots, x_N . Здесь предполагается, что величины x_n могут быть как механической, так и электрической природы (например, смещения или заряды и т.п.).

Анализ малых свободных колебаний в таких системах, если они консервативны, приводит к решению системы линейных дифференциальных уравнений, которая в матричной записи выглядит следующим образом:

$$Mx'' + Kx = 0, \quad (1)$$

где $x(t)$ - вектор смещения с компонентами x_1, x_2, \dots, x_N ; $x''(t)$ - вектор ускорения с компонентами $x''_1, x''_2, \dots, x''_N$; M - матрица масс (индуктивностей), K - матрица жесткости (обратных емкостей). Матрицы K и M квадратные, симметричные, порядка N . Элементы матриц m_{ni} и k_{ni} совпадают с коэффициентами квадратичных форм, представляющих кинетическую и потенциальную энергии системы в этих координатах:

$$2T = \sum_{n,l=1}^N m_{nl} x''_n x''_l; \quad 2U = \sum_{n,l=1}^N k_{nl} x_n x_l. \quad (2)$$

Систему уравнений (1) в каждом случае можно получить на основе (2) по методу Лагранжа. Любая строка системы (1) для обобщенной координаты записывается в виде

$$\sum_{l=1}^N (m_{nl} x''_n + k_{nl} x_l) = 0, \quad n=1, 2, \dots, N. \quad (1a)$$

Коэффициенты квадратичных форм (2) зависят от системы обобщенных координат и меняются при переходе от одних координат к другим. Для малых колебаний в консервативных системах с сосредоточенными параметрами всегда существует избранная система обобщенных координат $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$, в которой квадратичные формы (2) и для T , и для U диагональные. Такие координаты называются нормальными координатами. В нормальных координатах система (1), (1a) распадается на N не связанных между собой простейших уравнений типа

$$m_n^* \eta_n'' + k_n^* \eta_n = 0, \quad n=1, 2, \dots, N,$$

решение которых можно записать сразу в виде

$$m_n^* \eta_n'' + k_n^* \eta_n = 0, \quad n=1, 2, \dots, N,$$

где $\omega_n = \sqrt{\frac{k_n^*}{m_n^*}}$ - частота нормальных колебаний, $n=1, 2, \dots, N$. В нормальных координатах и процедура решения и вид движения необычайно просты.

Однако нормальные координаты найти сразу, как правило, не представляется возможным. Обычно приходится рассматривать задачу о колебаниях в произвольных обобщенных координатах и решать систему уравнений (1), (1a), и только в результате решения этой системы уравнений становятся известными

и нормальные частоты ω_n , и преобразование от произвольно выбранных координат x_n к нормальным координатам η_n .

Решение системы (1а) удобно искать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

где A - искомый вектор амплитуд с компонентами A_1, A_2, \dots, A_N - амплитудами в соответствующих координатах, ω - неизвестная частота.

Для отдельных координат решение (3) запишется следующим образом:

$$x_n = A_n \cos(\omega t + \alpha). \quad (3a)$$

Подстановка (3) в (1) или (3а) в (1а) приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно неизвестных амплитуд A_n :

$$-\omega^2 M A + K A = 0. \quad (4)$$

Систему (4) можно представить двояким образом: либо в виде

$$(M^{-1}K)A = \omega^2 A, \quad (4a)$$

либо в виде

$$(K^{-1}M)A = \frac{1}{\omega^2} A. \quad (4б)$$

Отсюда следует, что задача отыскания амплитуд и частот свободных колебаний в дискретной консервативной колебательной системе есть задача на собственные значения для матрицы $(M^{-1}K)$ или $(K^{-1}M)$. Вектор амплитуд $A = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ - собственный вектор указанных матриц, а квадрат частоты собственных колебаний ω^2 (или $1/\omega^2$) - собственное число соответствующей матрицы.

Для отыскания собственных частот ω и собственных векторов A запишем систему однородных уравнений (4) в скалярном виде

$$\sum_{l=1}^N (-\omega^2 m_{nl} + k_{nl}) A_l = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4в)$$

Такая система дает отличные от нуля решения только при условии равенства нулю ее определителя, т.е. при условии, что

$$\text{Det} \{-\omega^2 m_{nl} + k_{nl}\} = \Delta(\omega^2) = 0. \quad (4г)$$

Определитель системы (4) - (4в) представляет собой полином N -й степени относительно величины ω^2 и имеет N действительных, положительных (как правило, различных) корней.

Уравнение (4г) - характеристическое уравнение системы (1) – определяет N значений квадратов собственных частот

$$\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2.$$

Все собственные гармонические движения вида (3) – (3а), возможные в системе, могут иметь частоты только из этого набора. Каждому значению собственного числа ω_s^2 соответствует свой собственный вектор A_s . Но поскольку система уравнений (4в) однородна, то для любого из значений $\omega^2 = \omega_s^2$ можно определить компоненты собственного вектора $A_1^{(s)}$ ($s=1, 2, \dots, N$) только с точностью до постоянного множителя. В качестве такого неопределенного множителя можно выбрать амплитуду колебаний $A_1^{(s)}$ в первой обобщенной координате. Тогда любой из числа N собственных векторов задачи представляется в виде

$$A_s^{(s)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varepsilon_{s2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{sN} \end{Bmatrix} A_1^{(s)} = \varepsilon_s A_1^{(s)},$$

где вектор ε_s с компонентами $\{1, \varepsilon_{s2}, \dots, \varepsilon_{sN}\}$ - нормированный вектор колебания с номером "s". Компоненты вектора ε_s задают отношение амплитуд в координатах: $\varepsilon_{sn} = A_n^{(s)} / A_1^{(s)}$ ($n=1, 2, \dots, N$) при колебаниях на собственной частоте ω_s ($n=1, 2, \dots, N$). Величины ε_{sn} называют коэффициентами распределения амплитуд, или коэффициентами формы s -го собственного колебания, вектор ε_s называют вектором формы s -го собственного колебания. Нормированные таким способом собственные векторы ε_s ($s=1, 2, \dots, N$) однозначно определяются из системы уравнений (4) – (4в). Для этого каждую строку уравнений (4в) следует поделить на $A_1^{(s)}$ и отбросить одно из уравнений системы (любое), поскольку оно лишнее. В итоге получается неоднородная алгебраическая система $(N-1)$ порядка:

$$-\omega_s^2 m_{n1} + k_{n1} + \sum_{l=2}^N (-\omega_s^2 m_{nl} + k_{nl}) \varepsilon_{sl} = 0, \quad (4д)$$

где индекс строки n принимает $(N-1)$ значение.

Решая систему (4д) последовательно для каждого значения собственной частоты ω_s ($s=1, 2, \dots, N$), получим совокупность коэффициентов распределения: $\{1, \varepsilon_{s2}, \dots, \varepsilon_{sN}\}$ ($s=1, 2, \dots, N$) и тем самым найдем все N собственных векторов ε_s ($s=1, 2, \dots, N$).

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАЧИ. Теперь составим уравнения динамики (1), (1а)

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{l^2}\right)x_1'' + \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{l^2}\right)x_2'' + cx_1 &= 0, \\ \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{l^2}\right)x_1'' + 2\left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{l^2}\right)x_2'' + \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{l^2}\right)x_3'' + cx_2 &= 0, \\ \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{l^2}\right)x_2'' + \left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{l^2}\right)x_3'' + cx_3 &= 0. \end{aligned}$$

Для стержня $I_0 = ml^2/12$: $\frac{m}{4} + \frac{I_0}{l^2} = \frac{1}{3}m$, $\frac{m}{4} - \frac{I_0}{l^2} = \frac{1}{6}m$.

Система уравнений (1а) в приведенном виде запишется так:

$$\begin{aligned} x_1'' + \frac{1}{2}x_2'' + n^2x_1 &= 0, \\ \frac{1}{4}x_1'' + x_2'' + \frac{1}{4}x_3'' + \frac{1}{2}n^2x_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}x_2'' + x_3'' + n^2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

где $n^2 = 3c/m$.

Подставляя в систему уравнений (1а) решение в форме (3), получим для амплитуд A_l ($l=1,2,3$) однородную систему (4в):

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + n^2)A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 + 0 \cdot A_3 &= 0, \\ -\frac{1}{4}\omega^2 A_1 + \left(-\omega^2 + \frac{1}{2}n^2\right)A_2 - \frac{1}{4}\omega^2 A_3 &= 0, \\ 0 \cdot A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 + (-\omega^2 + n^2)A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует характеристическое уравнение (4г)

$$(n^2 - \omega^2) \left[(n^2 - \omega^2) \left(\frac{1}{2}n^2 - \omega^2 \right) - \frac{1}{4}\omega^4 \right] = 0,$$

собственные частоты системы

$$\omega^2 = n\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}; \quad \omega_2 = n; \quad \omega_3 = n\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Отбрасывая последнюю строчку в системе (4в) записываем для коэффициентов распределения систему уравнений (4д), решая которую получим выражения для компонент собственных векторов

$$\varepsilon_{s,2} = \frac{n^2 - \omega_s^2}{\frac{1}{2}\omega_s^2}, \quad \varepsilon_{s,3} = \frac{\frac{1}{2}n^2 - \omega_s^2}{\frac{1}{4}\omega_s^2} \varepsilon_{s,2} - 1 \quad (\varepsilon_{s,1} = 1).$$

Подставляя в эти равенства последовательно значения $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$, найденные выше, вычислим компоненты собственных векторов и сами собственные векторы

$$\varepsilon_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,74 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,73 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Откладывая по оси абсцисс номера координат $n=1,2,3$, а по оси ординат – значения коэффициентов распределения, можно построить формы собственных колебаний и представить себе расположение стержней при колебании на каждый из собственных тонов (см. рис. 1,б).

ЗАДАЧА 11

Покажите, что электромагнитные волны могут распространяться внутри полой металлической трубы прямоугольного поперечного сечения, стенки которой полностью проводящие. Каковы групповая и фазовая скорости распространения? Показать, что имеется граничная частота и что электромагнитные волны с частотой меньше граничной не могут распространяться по такому волноводу.

РЕШЕНИЕ.

Рассмотрим решение (поперечное электрическое) уравнения Максвелла внутри полости (рис.2):

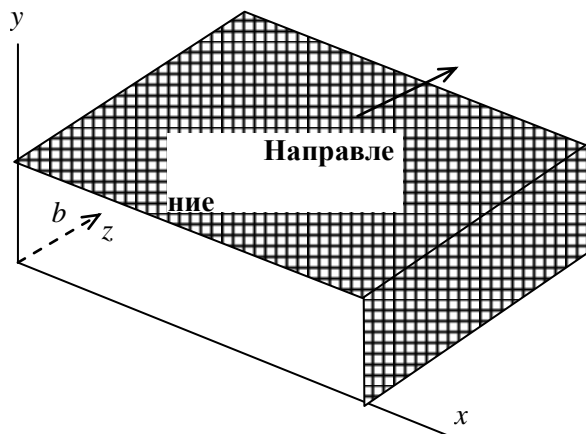


Рис.2

$$E_z = 0, E_x = E_1(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, E_y = E_2(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

Из волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_i - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_i = 0. \quad (1).$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям, гласящим, что поперечная составляющая E и продольная составляющая H обращаются в нуль, имеет вид

$$E_1 = E_{01} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, E_2 = E_{02} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

Здесь $nE_{01}/a + mE_{02}/b = 0$, чтобы удовлетворялось уравнение $\nabla E = 0$. Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

где n, m – целые числа и, считаем, $a > b$. Так как в случае распространения электромагнитных волн по волноводу $k^2 \geq 0$, то существует минимальная частота $\omega_0 = c\pi/a$. Для фазовой и групповой скоростей имеем следующие выражения:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \left[1 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right]^{1/2},$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \left[1 + \frac{\pi^2}{k^2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right]^{-1/2}.$$

Аналогичный результат получается и для поперечной магнитной моды ($H_z = 0$), однако граничная частота в этом случае выше. Легко заметить также, что $v_\phi v_g = c^2$.

ЗАДАЧА 12

Ионосферу можно рассматривать как ионизированную среду, содержащую N свободных электронов в единице объема. Показать, что если линейно поляризованная волна распространяется в ионосфере в направлении, параллельном направлению слабого однородного магнитного поля Земли \mathbf{H} , то плоскость поляризации волны будет поворачиваться на угол, пропорциональный пройденному волной расстоянию. Вычислить коэффициент пропорциональности.

РЕШЕНИЕ.

Пусть поле \mathbf{H} направлено вдоль положительной полуоси z . Пренебрежем магнитным полем распространяющейся волны по сравнению с полем Земли. Уравнение движением электронов ионосферы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} e^{-i\omega t} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

где \mathbf{E} соответствует суперпозиции право- и лево-поляризованных пучков $E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$. Движение электронов происходит в плоскости $z=0$, и его зависимость от времени должна быть такой же, как и зависимость \mathbf{E} . Из этих соображений \mathbf{v} можем представить равной $v_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$.

Тогда

$$[\mathbf{vH}] = \pm iHv_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$$

и

$$v_0(-i\omega \mp ieH/c) = eE_0.$$

Следовательно,

$$v_0 = \frac{ieE_0}{m(\omega + \omega_0)}, \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc}.$$

Плотность тока $J_0 = Nev_0 = iNe^2E_0/m(\omega \pm \omega_0)$. Но

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi i}{c} \mathbf{J} = -\frac{i\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega \pm \omega_0)} \right] \mathbf{E},$$

где $\omega_n^2 = 4\pi Ne^2/m$ – квадрат плазменной частоты. С другой стороны, в отсутствие тока, но в диэлектрической среде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}.$$

Сравнивая эти два выражения, получим:

$$\varepsilon_{\pm} = n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega \pm \omega_0)}.$$

Право- и лево - поляризованные пучки распространяются с различными фазовыми скоростями c/n_+ и c/n_- , поэтому электрический вектор \mathbf{E} вращается. Если при $z=0$ вектор $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$ направлен по оси x , то на расстоянии z :

$$\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = E_0 \{ \hat{x} [e^{i\omega(n_+z/c-t)} + e^{i\omega(n_-z/c-t)}] + i\hat{y} [e^{i\omega(n_+z/c-t)} - e^{i\omega(n_-z/c-t)}] \},$$

что означает поворот на угол θ , определяемый соотношением

$$\text{tg } \theta = \frac{i(e^{i\omega n_+ z/c} - e^{i\omega n_- z/c})}{(e^{i\omega n_+ z/c} + e^{i\omega n_- z/c})}.$$

Подставив в это выражение $n_+ - n_- = \delta n$, получим:

$$\text{tg } \theta = -\text{tg}(\omega \delta n z / 2c) \text{ или } \theta = -\omega z \delta n / 2c.$$

ЗАДАЧА 13

Полубесконечный диэлектрик, покрытый пленкой толщиной d , помещен в вакуум; на него нормально падает плоская электромагнитная волна. Предполагается, что $\mu=1$ для обеих сред и что пленка и диэлектрик имеют показатели преломления, равные соответственно n_1 и n_2 . Выразить амплитуду отраженной в вакууме волны через показатели преломления n_1 и n_2 и длину волны в вакууме λ . При каких условиях амплитуда отраженной волны обратится в нуль?

РЕШЕНИЕ.

Если E – амплитуда падающего света, то амплитуда после первого отражения от поверхности раздела вакуум – пленка A равна Er_A , а амплитуда прошедшего света равна Et_A (рис.3). Прошедший претерпевает многократные отражения от поверхностей A и B (поверхность раздела пленка – диэлектрик),

но часть его снова возвращается в вакуум. Доля эта определяется показателями преломления и пропускания r'_A, r_A, r_B и t_B, t_A .

Суммарная амплитуда отраженного в вакууме света

$$E_r = Er_A + Et_A t'_A r_B e^{2ikd} [1 + r'_A r_B e^{2ikd} + (r'_A r_B e^{2ikd})^2 + \dots] =$$

$$= Er_A + \frac{Et_A t'_A r_B e^{2ikd}}{1 - r'_A r_B e^{2ikd}} = E \frac{r_A + r_B e^{2ikd} (t_A t'_A - r'_A r'_A)}{1 - r'_A r_B e^{2ikd}}.$$

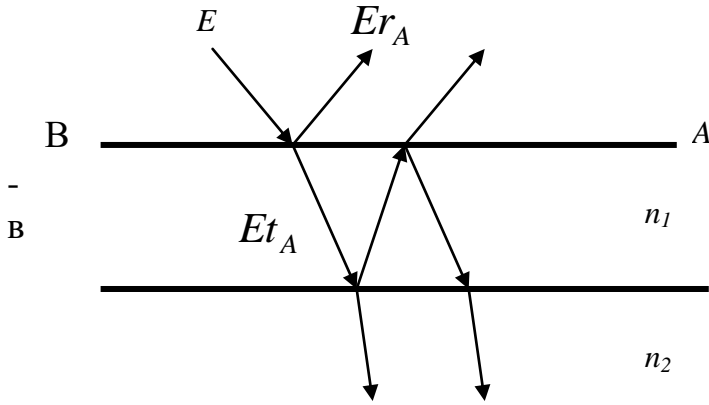


Рис.3

этом выражении $k = 2\pi n_1 / \lambda$, а λ длина волны падающего света в вакууме. Множитель e^{2ikd} описывает изменение фазы волны при прохождении расстояния $2d$ в диэлектрике с коэффициентом преломления

n_1 . Воспользовавшись соотношениями Стокса, выведенными в предыдущей задаче, $r'_A = -r_A$ и $t_A t'_A + r^2_A = 1$, получим:

$$\frac{E_r}{E} = \frac{r_A + r_B e^{2ikd}}{1 + r_A r_B e^{2ikd}}.$$

Теперь выразим коэффициенты r_A и r_B через показатели преломления n_1 и n_2 . Для этого необходимо воспользоваться граничными условиями, удовлетворяющими уравнениям Максвелла. Так, на поверхности раздела A тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей должны быть непрерывны при переходе через поверхность:

$$E + Er_A = Et_A \quad \text{или} \quad 1 + r_A = t_A, \quad (1)$$

$$H + H_r = H_t. \quad (2)$$

Для плоской волны $H = E, H_r = -E_r$ (изменение знака обусловлено изменением направления распространения отраженной волны) и $H_t = n_1 E_t$. Таким образом, равенство (2) примет вид $1 - r_A = n_1 t_A$ и, следовательно,

$$r_A = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}.$$

Аналогично

$$r_B = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Условия, при которых амплитуда отраженной волны обращается в нуль, имеют вид

$$r_A = -r_B, \quad e^{2ikd} = +1 \quad \text{или} \quad r_A = r_B, \quad e^{2ikd} = -1.$$

Выразим эти условия через показатели преломления

$$n_2 = 1, n_1 d / \lambda = p/2 \text{ или } n_2 = n_1^2, n_1 d / \lambda = (2p+1)/4,$$

где p – целое число. Следует напомнить, что E_r/E можно также вычислить, рассмотрев электромагнитное поле стоячей волны в диэлектрике с показателем преломления n_1 и решив систему уравнений, определяемых согласованием граничных условий на поверхностях раздела A и B . Так, для электрического поля:

$$\text{на поверхности } A \quad E_r + E = E_1 + E_2;$$

$$\text{на поверхности } B \quad E_1 e^{ikd} + E_2 e^{-ikd} = E_r.$$

Из условия непрерывности магнитного поля (подставив $H = nE$), получим:

$$\text{на поверхности } A \quad E - E_r = n_1 E_1 - n_1 E_2;$$

$$\text{на поверхности } B \quad n_1 E_1 e^{ikd} - n_1 E_2 e^{-ikd} = n_2 E_r.$$

Исключив из этих четырех уравнений E_1, E_2 и E_r , получим приведенное выше выражение для E_r/E .

ЗАДАЧА 14

Опыт Аббе. Решетка Фраунгофера состоит из N параллельных непрозрачных линий, разделенных прозрачными интервалами. Коллиматор, который освещается монохроматическим светом, состоит из бесконечно тонкой щели F , помещенной в фокальной плоскости линзы $L1$. Вторая линза $L2$ расположена за решеткой, а в фокальной плоскости изображения помещается фотопластинка. Период решетки $p=10\text{мкм}$, число линий $N=5000$, длина волны света $\lambda=1,0\text{мкм}$, $f1=50\text{см}$ - фокусное расстояние линзы $L1$; $f2$ - фокусное расстояние линзы $L2$ и i - угол, который дифрагированные лучи образуют с нормалью к решетке. Определите значения $\sin i$ для различных изображений, образованных щелью F при условии нормального падения.

РЕШЕНИЕ.

Дифракция обнаруживается только в плоскостях, нормальных к щелям решетки.

Вдоль линии, параллельной щелям, интерференция не наблюдается. Между двумя гомологичными лучами имеется разность хода $\delta = p \sin i$. Следовательно, сдвиг фазы будет

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} p \sin i.$$

Интерференция происходит, если $p \sin i = k\lambda$, k - целое число.

Отсюда получаем значения i , соответствующие дифракционным максимумам.

$$\text{Пример: } \sin i = \frac{k\lambda}{p},$$

$$\sin i = k \times \frac{1}{10}.$$

Условие $\sin i \leq 1$ соответствует $k \leq 10$.

ЗАДАЧА 15

Когерентная монохроматическая волна падает на установку, изображенную на рис. 4, где P_r - призма с малым углом при вершине α и показателем преломления n ; Ob - объект, исследуемый на пропускание. На плоскости $P(x)$ изучается интерференция между волной Σ с комплексной амплитудой $A(x) \cdot e^{i\Phi(x)}$, пропускаемой объектом, и волной Σ_0 , известной как опорная волна, которая отклоняется призмой и имеет амплитуду $A(x) \cdot e^{i\Phi(x)}$. Будем считать, что объект не дает дифракции. Определите функцию интенсивности $I(x)$, найдя соотношения между отклонением Θ на призме и фазой опорной волны.

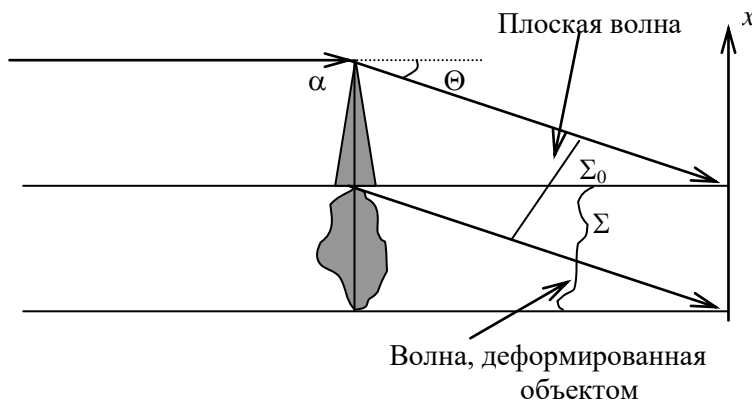


Рис. 4

РЕШЕНИЕ.

После прохождения через объект Ob электромагнитная волна имеет амплитуду вида $A = A(x) \cdot e^{i\Phi(x)}$. Для описания структуры

волны требуется как вещественная, так и комплексная амплитуды. Большинство приемников (фотопластинки) чувствительны к изменениям освещенности, но не дают информации о фазе. Метод, предложенный здесь, позволяет полностью восстановить волну Σ .

Опорная волна отклоняется на угол $\Theta = (n - 1)\alpha$.

Эта волна Σ_0 имеет постоянную амплитуду A_0 . Ее фаза $\Phi_0(x)$ изменяется линейно как функция x в плоскости π .

Имеем

$$\Phi_0(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \Theta x. \quad (1)$$

Здесь во всех задачах начало отсчета фазы выбирается на оси Ox и предполагается, что лучи, интерферирующие в точке O , находятся в фазе. Волны, которые не пересекли ось Ox , имеют положительную разность фаз.

Результирующая амплитуда в точке $P(x)$ определяется выражением

$$A_0 \cdot e^{-i\Phi_0(x)} + A \cdot e^{i\Phi(x)}.$$

Результирующая интенсивность

$$I(x) = \left[A_0 \cdot e^{-i\Phi_0(x)} + A \cdot e^{i\Phi(x)} \right] \cdot \left[A_0 \cdot e^{-i\Phi_0(x)} + A \cdot e^{i\Phi(x)} \right],$$

$$I(x) = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x) \cos[\Phi_0(x) + \Phi(x)].$$

Фаза $\Phi(x)$ содержится в выражении для функции $I(x)$. Изменение функции $\Phi(x)$ влечет за собой изменение периода или положения полос. Изменение функции $A(x)$ изменяет контрастность полос.

ЗАДАЧА 16

В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A , перпендикулярный экрану, и луч S_1BA , отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рис.5). Расстояние L_1 экрана от источника равно 1 м , расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм . Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана - усиление или ослабление интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A , если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластину стекла ($n = 1,55$) толщиной $d = 6 \text{ мкм}$.

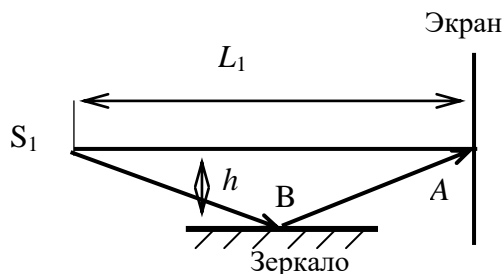


Рис. 5

РЕШЕНИЕ. Построим мнимое изображение S_2 источника S_1 в зеркале (рис 6.).

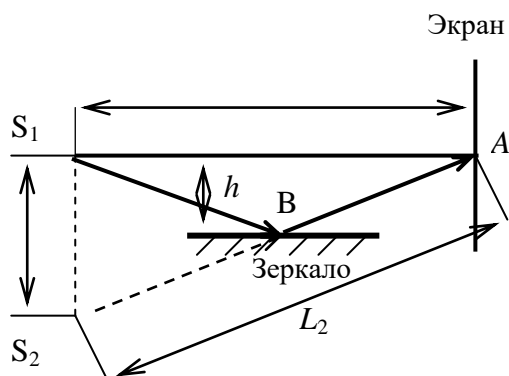


Рис. 6

Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому при сложении волн, проходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2}. \quad (1)$$

Если m - целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m - целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

1. Оптическая разность хода Δ_1 будет складываться из геометрической разности $L_2 - L_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды оптически более плотной. Таким образом,

$$\Delta_1 = L_2 - L_1 + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Так как $L_2 = \sqrt{L_1^2 + H^2}$ (рис 6.), то

$$L_2 - L_1 = L_1 \sqrt{1 + \left(\frac{H}{L_1}\right)^2} - L_1 = L_1 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{H}{L_1}\right)^2} - 1 \right).$$

Величина $\frac{H}{L_1} \ll 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ при $\alpha \ll 1$. Применив ее, получим:

$$L_2 - L_1 \approx L_1 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{L_1}\right)^2 - 1 \right) = \frac{H^2}{2L_1}.$$

Подставив полученное выражение $L_2 - L_1$ в формулу (2), найдем $\Delta_1 = \frac{H^2}{2L_1} + \frac{\lambda}{2}$.
Зная Δ_1 , по формуле (1) найдем

$$m_1 = \frac{H^2 / (2L_1) + \lambda / 2}{\lambda / 2} = \frac{H^2}{L_1 \lambda} + 1.$$

Так как $H = 2h$, то окончательно получим:

$$m_1 = 4 \frac{h^2}{L_1 \lambda} + 1.$$

После вычисления найдем

$$m_1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полуволен, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

2. Стеклопластина толщиной d , поставленная на пути луча S_1A (рис. б) изменит оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути $L_1 - d$ и оптической длины пути nd луча в самой пластине, т.е.

$$L = (L_1 - d) + nd = L_1 + (n - 1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta_2 = L_2 - L + \frac{\lambda}{2} = L_2 - (L_1 + (n - 1)d) + \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta_2 = \Delta_1 - (n - 1)d.$$

Пользуясь формулой (1), найдем:

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{\lambda / 2} = \frac{\Delta_1 - (n - 1)d}{\lambda / 2} = m_1 - 2 \frac{d(n - 1)}{\lambda}.$$

Произведя вычисления, получим:

$$m_2 = 19,8.$$

Число длин полуволен оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19, то в точке A будет частичное усиление.

ЗАДАЧА 17

На тонкую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n_2 вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 0,6 \mu\text{м}$). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

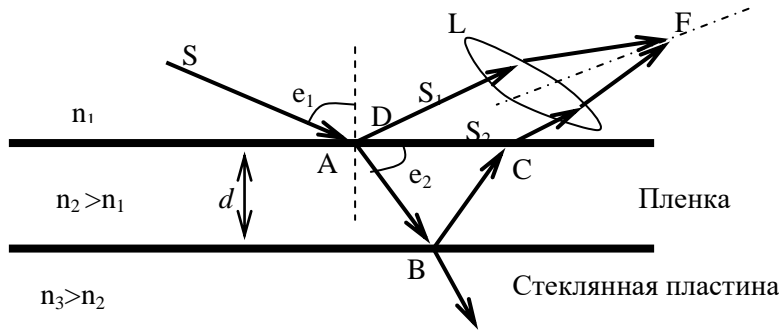


Рис. 7

РЕШЕНИЕ.

Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA . Ход этого пучка в случае, когда угол падения $\varepsilon_1 \neq 0$, показан на рисунке. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу L , пересекаются в ее фокусе F и интерферируют между собой.

Так как показатель преломления воздуха ($n_1 = 1,00029$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1,4$), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1,5$), то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебаний пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно также на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B . Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе F линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было.

Как известно, условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволен:

$$\Delta = (2k + 1)(\lambda/2).$$

Как видно из рисунка, оптическая разность хода

$$\Delta = L_2 n_2 - L_1 n_1 = (|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n_1.$$

Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид:

$$(|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n_1 = (2k + 1)(\lambda/2).$$

Если угол падения ε_1 будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \rightarrow 0$ и $|AB| + |BC| \rightarrow 2d$, где d – толщина пленки. В пределе при $\varepsilon_1 = 0$ будем иметь

$$\Delta = 2dn_2 = (2k + 1)(\lambda/2),$$

откуда искомая толщина пленки

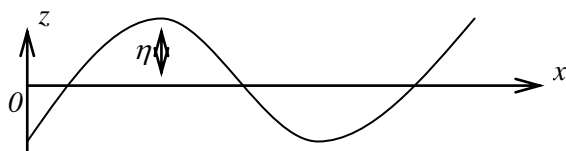
$$d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = 0,11 \text{ мкм}; \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм} \text{ и т.д.}$$

ЗАДАЧА 18

Температура воздуха над горизонтальной границей раздела равна 280 К. Внизу воздух имеет температуру $T = 300$ К. Предположим, что появление синусоидальных волн на границе раздела обусловлено гравитационными волнами, длиной волны λ и малой амплитудой. Найти фазовую скорость этих волн, как функцию длины волны λ , считая, что граница раздела расположена достаточно далеко от других возможных границ раздела. Предполагается, что воздух несжимаем.



РЕШЕНИЕ.

Пусть плотность верхней среды равна ρ_1 , а нижней ρ_2 . Так как воздух несжимаем, то давление везде удовлетворяет уравнению $\nabla^2 P = 0$. Колебания границы раздела по закону $\eta = \alpha \exp[i(kx - \omega t)]$ вызовут небольшое изменение давления по сравнению со статическим значением, которое, однако, будет затухать по мере удаления от границы раздела. Следовательно,

$$P_1 = -\rho_1 g z + \beta_1 \exp[-kz + i(kx - \omega t)]$$

и

$$P_2 = -\rho_2 g z + \beta_2 \exp[kz + i(kx - \omega t)],$$

где β_1 и β_2 - малые константы, которые стремятся к нулю при $\eta \rightarrow 0$.

Напишем граничные условия:

$$P_1 = P_2 \text{ при } z = \eta;$$

из уравнения $\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -\nabla P$ получим

$$\rho_1 \bar{\eta} = -\frac{\partial P_1}{\partial z} \text{ и } \rho_2 \bar{\eta} = -\frac{\partial P_2}{\partial z}.$$

Поскольку η мало, граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\rho_1 g \alpha + \beta_1 &= -\rho_2 g \alpha + \beta_2 \\ -w^2 \rho_1 \alpha &= k \beta_1 \text{ и } w^2 \rho_2 \alpha = k \beta_2, \end{aligned}$$

выразив

$$\beta_1 = -\frac{w^2 \rho_1 \alpha}{k} \text{ и } \beta_2 = -\frac{w^2 \rho_2 \alpha}{k},$$

имеем

$$-\rho_1 g \alpha - \frac{w^2 \rho_1 \alpha}{k} = -\rho_2 g \alpha + \frac{w^2 \rho_2 \alpha}{k},$$

откуда

$$w^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) k g}{(\rho_2 + \rho_1)}.$$

Заметим, что если $\rho_1 > \rho_2$, то частота мнимая, а, значит, колебания неустойчивые. Этого следовало ожидать, поскольку более тяжелая среда стала бы опускаться. Фазовая скорость $v = w/k$ определяется соотношением

$$v = \left[\frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{(\rho_2 + \rho_1) k} \right]^{1/2} = \left[\frac{(\rho_2 - \rho_1) g \lambda}{2\pi(\rho_2 + \rho_1)} \right]^{1/2},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

Чтобы выразить плотность воздуха через температуру, можно использовать закон для идеального газа $\rho = k/T$ и, следовательно,

$$v = \left[\frac{(T_1 - T_2) g \lambda}{2\pi(T_2 + T_1)} \right]^{1/2}.$$

ЗАДАЧА 19

Получить уравнения для амплитуд и фаз волн, взаимодействующих при вынужденном воздействии Мандельштама – Бриллюэна. Световая волна с частотой ω_1 и волновым числом k_1 , рассеиваясь на акустической волне с частотой ω_2 и волновым числом k_2 , образует световую волну с частотой ω_3 и волновым числом k_3 ($\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, $k_1 = k_2 + k_3$).

РЕШЕНИЕ.

Исходные уравнения – уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu \frac{a}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} E + \rho \frac{\partial E}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} (\rho V), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{a^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\mu \left[V \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial x} \rho - \frac{\bar{a}}{4\pi} E \frac{\partial E}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

где учтено, что диэлектрическая постоянная $\varepsilon = \varepsilon_0 + a\rho$, избыточное давление

$$\Delta P = -\frac{1}{8\pi} \bar{a} E^2,$$

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0,$$

$$\beta = -\frac{a^2}{\rho^2} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_0, \mu \ll 1.$$

Поскольку при μ_0 оптическая и акустическая волны независимы, решение ищется в виде

$$\begin{aligned} E &= A_1 e^{i(w_1 t - k_1 x + \varphi_1)} + A_3 e^{i(w_3 t - k_3 x + \varphi_3)} + k.c., \\ H &= \psi_2(w_1) A_1 e^{i(w_1 t - k_1 x + \varphi_1)} + \psi_2(w_3) A_3 e^{i(w_3 t - k_3 x + \varphi_3)} + k.c., \\ w_1 &= w_2 + w_3, \\ k_1 &= k_2 + k_3, (k_3 < 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{w}{k}, \\ \psi_4 &= \frac{a^2}{\rho} \frac{k}{w}. \end{aligned}$$

Уравнения для амплитуд и фаз имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\mu \frac{a}{2\varepsilon_0} w_1 A_2 A_3 \sin \theta, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \mu \frac{a}{2\varepsilon_0} w_3 A_1 A_2 \sin \theta, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + a \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \mu \frac{\bar{a}\rho_0}{8\pi a^2} w_2 A_1 A_3 \sin \theta, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\mu \frac{a}{2\varepsilon_0} w_1 \frac{A_2 A_3}{A_1} \cos \theta, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= -\mu \frac{a}{2\varepsilon_0} w_3 \frac{A_1 A_2}{A_3} \cos \theta, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= -\mu \frac{\bar{a}\rho_0}{8\pi a^2} w_2 \frac{A_1 A_3}{A_2} \cos \theta, \\ \theta &= \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3. \end{aligned}$$

В стационарном режиме ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) существуют первые интегралы вида

$$\begin{aligned} \delta_2 A_1^2 + \delta_1 A_2^2 &= c_1, \\ \delta_3 A_1^2 - \delta_1 A_3^2 &= c_2, \\ \delta_3 A_2^2 + \delta_2 A_3^2 &= c_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{1,3} &= \mu \frac{a w_{1,3}}{2c\varepsilon_0}, \\ \delta_2 &= \mu \frac{\bar{a}\rho_0 w_2}{8\pi a^3} \end{aligned}$$

Отсюда можно сделать вывод, что интенсивности акустической (A_2^2) и рассеянной световой (A_3^2) волн будут возрастать в направлении их распространения, а интенсивность исходной световой волны (A_1^2) уменьшится.

9. Требования к рейтинг-контролю

модуль	Содержание модуля (темы)	Распределение баллов по модулям			
		Текущий контроль	Рубежный контроль	Всего на модуль	зачет
1	<p>1. Уравнение Максвелла для однородных сред. Уравнения Максвелла в вещественной форме. Векторы в комплексной форме. Уравнения Максвелла в комплексной форме. Преобразования Фурье и групповая скорость. Спектр мощности и автокорреляционные функции.</p> <p>2. Плоские волны в однородной среде. Плоские волны. Плоские звуковые волны в жидкостях и газах. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле. Плоские электромагнитные волны в однородной среде. Поляризация электромагнитных волн. Отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела.</p> <p>3. Волны в диспергирующих средах. Волновой пакет в диспергирующей среде. Материальные уравнения электромагнитного поля в среде с дисперсией. Дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига. Дисперсия электромагнитных волн в диэлектриках. Диэлектрическая проницаемость и распространение волн со свободными зарядами</p>	10	20	30	40
2	1. Распространение волн в	10	20	30	

	<p>анизотропных средах. Общие закономерности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах. Распространение плоских волн в кристаллических средах. Распространение электромагнитных волн в гидромагнитных средах.</p> <p>2. Электромагнитные волны в прозрачных кристаллах. Оптическая индикатриса. Эллипсоид Френеля. Решение задачи о распространении света в кристалле в произвольной системе координат. Взаимная связь между оптическими поверхностями в кристаллах. Коническая рефракция. Наблюдения оптической анизотропии кристаллов в поляризованном свете.</p> <p>3. Электрооптическая модуляция лазерного излучения. Электрооптический эффект. Электрооптическое запаздывание. Амплитудная электрооптическая модуляция. Электрооптические модуляторы и дефлекторы.</p> <p>4. Взаимодействие света и звука. Рассеяние света звуком. Корпускулярная модель брегговской дифракции света на звуке. Анализ брегговской дифракции света на акустических волнах. Акустооптические дефлекторы.</p> <p>1. Распространение волн в присутствии направляющих систем и в волноводах. Волны на поверхности жидкости. Релеевские волны на поверхности</p>				
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--	--	--

	<p>изотропных твердых тел. Волноводное распространение в слое. Электромагнитные волны в металлических волноводах. Поток энергии и затухание волн в волноводе. Объемные резонаторы. 2. Излучение волн. Тепловое возбуждение звука модулированным излучением. Движущийся точечный источник. Источники электромагнитного поля. Интегральные уравнения для вектора Герца. 3. Нелинейные волны. Простые волны. Нелинейные взаимодействия в простых волнах. Распространение волн, содержащих разрывы. Нелинейные волны в дисперсионной среде. Нелинейные волны в диспергирующей среде. Интенсивные волновые пучки.</p>				
итого	100	30	30	60	40

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

ОС Windows 7-10

IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных* помещений	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Учебная аудитория № 218 (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Комплект учебной мебели на 25 посадочных мест.	Adobe Acrobat Reader DC – бесплатно Microsoft Windows 10

	<p>2. Экран настенный 153x203</p> <p>3. Переносной комплект мультимедийной техники.</p>	<p>Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017</p> <p>Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г.</p> <p>Google Chrome – бесплатно</p> <p>MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Помещения для самостоятельной работы:

Наименование помещений	Оснащенность помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
<p>Помещение для самостоятельной работы, учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, практики, Компьютерный класс физико-технического факультета. Компьютерная лаборатория робототехнических систем №4а (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)</p>	<p>1. Компьютер RAMEC STORM C2D 4600/160Gb/ 256mB/DVD-RW +Монитор LG TFT 17" L1753S-SF – 12 шт</p> <p>2. Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2) Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. экран Lumien 180*180. ноутбук Dell N4050. сумка 15,6", мышь</p> <p>3. Коммутатор D-Link 10/100/1000mbps 16-port DGS-1016D</p> <p>4. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО</p> <p>5. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО</p> <p>6. Демонстрационное оборудование комплект «LegoMidstormsEV3»</p> <p>7. Комплект учебной мебели</p>	<p>Adobe Acrobat Reader DC - бесплатно</p> <p>Cadence SPB/OrCAD 16.6 - Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009</p> <p>Google Chrome - бесплатно</p> <p>Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) - бесплатно</p> <p>Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г.</p> <p>Lazarus 1.4.0 - бесплатно</p> <p>Lego MINDSTORM EV3 - бесплатно</p> <p>Mathcad 15 M010 - Акт предоставления прав ИС00000027 от 16.09.2011</p> <p>MATLAB R2012b - Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012</p> <p>Microsoft Express Studio 4 - бесплатно</p> <p>MiKTeX 2.9 - бесплатно</p> <p>MPICH 64-bit – бесплатно</p> <p>MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK - бесплатно</p> <p>Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017</p> <p>MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017</p>

Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (или модуля)	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания кафедры, утвердившего изменения
1.	Раздел IV	Реквизиты «Положения о рейтинговой системе обучения и оценки качества учебной работы студентов ТвГУ» и «Положения о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) студентов ТвГУ»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г.
2.	Раздел IX	Оснащенность аудиторного фонда для проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентов согласно «Справки МТО ООП ...»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г.