

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Смирнов Сергей Николаевич
Должность: врио ректора
Дата подписания: 23.09.2022 12:51:09
Уникальный программный ключ:
69e375c64f7e975d4e8830e7b4fcc2ad1bf35f08

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

Утверждаю:



Руководитель ООП

Б.Б.Педько

«28»

июня

2022 г.

Рабочая программа дисциплины (с аннотацией)

Векторный и тензорный анализ

Направление подготовки

03.03.02 Физика

профиль

Физика конденсированного состояния вещества

Для студентов

2 курса, очной формы обучения

Составитель: к.ф.-м.н., доцент Зубков В.В.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "Зубков В.В.", written over a faint circular stamp.

Тверь, 2022

I. Аннотация

1. Наименование дисциплины в соответствии с учебным планом

Векторный и тензорный анализ

2. Цель и задачи дисциплины

Целью освоения дисциплины является:

формирование и развитие у обучающихся компетенций в области векторного и тензорного анализа и его приложений к физическим и техническим задачам.

Задачами освоения дисциплины являются:

- освоение основных понятий и идей, лежащих в основе современного тензорного анализа;
- овладение навыками и приемами решения задач в области современной физики, связанных с использованием векторного и тензорного исчисления.

3. Место дисциплины в структуре ООП

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» входит в базовую часть учебного плана.

Дисциплина «Векторный и тензорный анализ» основывается на знаниях студентов в области математического анализа и линейной алгебры. Призвана сформировать у студента современное представление о векторных и тензорных описаниях физических величин и геометрических методах математической физики. Данная дисциплина тесно связана со всеми разделами теоретической физики, а также дисциплинами, посвященными методам описания конденсированной среды.

«Векторный и тензорный анализ» формирует у студента компетенции, которые будут в дальнейшем использоваться при освоении дисциплин блока «Теоретическая физика» и обязательных дисциплин естественнонаучного модуля.

4. Общая трудоемкость дисциплины: 2 зачетные единицы, 72 академических часа, **в том числе контактная работа:** лекции 18 часов, практические занятия 18 часов; **самостоятельная работа:** 36 часов.

5. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

<p>Планируемые результаты освоения образовательной программы (формируемые компетенции)</p>	<p>Планируемые результаты обучения по дисциплине</p>
<p>ОПК 2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</p>	<p>Владеть: не предусмотрено.</p> <p>Уметь: применять методы векторного и тензорного анализа при решении профессиональных задач.</p> <p>Знать: фундаментальные разделы векторного и тензорного анализа, необходимые для осуществления научно-исследовательской и научно-инновационной деятельности.</p>

6. Форма промежуточной аттестации зачет (3 семестр).

7. Язык преподавания - русский.

II. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

1. Для студентов очной формы обучения

Учебная программа – наименование разделов и тем	Всего (час.)	Контактная работа (час.)		Самостоятельная работа (час.)
		Лекции	Практические занятия	
<p>Тема 1. Элементы векторной алгебры Общее определение вектора. Скалярное произведение. Метрический тензор. Взаимный базис. Ко- и контравариантные компоненты. Регулярные криволинейные координаты. Координатные линии и поверхности. Коэффициенты Ламэ. Ортогональные координаты. Физические компоненты векторов. Пример: скорость в криволинейной системе координат. Символ Леви-Чивиты. Векторное произведение. Смешанное произведение. Двойное векторное произведение. Вычисление объема, построенного на заданных векторах. Пример. Зона Бриллюэна – ячейка Вигнера-Зейтца в обратном пространстве. Поворот и инверсия. Аксиальные и полярные векторы. Пример: напряженность электрического поля и напряженность магнитного поля.</p>	10	2	2	6
<p>Тема 2. Основы векторного анализа <i>Векторные и скалярные поля.</i> Производная по направлению. Линии уровня. Градиент скалярного поля. Оператор Гамильтона. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса. Ротор векторного поля. Теорема Стокса. Формула Грина. Оператор Лапласа. Первая и вторая формулы Грина. Теорема Гельмгольца. Пример: уравнения Максвелла. Векторный потенциал. <i>Дифференциальные операции в криволинейной системе координат.</i> Элемент длины, площади и объема. Градиент. Ковариантная производная. Дивергенция. Символы Кристоффеля первого и второго рода. Оператор Лапласа.</p>	16	4	4	8

<p>Векторное произведение в криволинейной системе координат. Ротор.</p> <p>Пример: ускорение, второй закон Ньютона в криволинейных координатах, уравнение Лагранжа второго рода.</p>				
<p>Тема 3. Тензорная алгебра</p> <p>Множества и топология. Карты и атлас. Гладкая структура. Дифференцируемое многообразие. Скалярная функция на многообразии. Векторное поле на многообразии. Сопряженное пространство. 1-форма. Определение тензора. Операции над тензорами: свертка, тензорное умножение, симметрирование, альтернирование. Кососимметричный тензор.</p> <p>Примеры. Изотропные тензоры. Девиатор, шаровой тензор. Собственные значения и векторы тензора. Тензор деформации. Закон Гука. Инварианты Тензора. Тензорная поверхность.</p> <p>Дифференциальные формы и поливекторы. Дифференциальная форма максимальной степени. Относительный тензор. Оператор Ходжа (Ходжевская дуальность).</p>	24	6	6	12
<p>Тема 4. Тензорный анализ</p> <p>Внешняя производная дифференциальной формы, свойства внешней производной. Замкнутые и точные дифференциальные формы. Лемма Пуанкаре.</p> <p>Форма объема. Дифференциальные операторы векторного анализа (дивергенция, лапласиан, ротор) на языке внешнего дифференцирования. Основные тождества векторного анализа как следствия свойств внешнего дифференциала.</p> <p>Пример. Уравнения электродинамики на языке дифференциальных форм.</p> <p>Интеграл от дифференциальной формы. Общая интегральная формула Стокса. Теорема Гаусса о дивергенции. Формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.</p>	22	6	6	10
ИТОГО	72	18	18	36

Ш. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

– методические рекомендации по организации самостоятельной работы – примеры вопросов и задач к зачету.

IV. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Форма проведения зачета: студенты, освоившие программу курса могут получить зачету по итогам семестровой и полусеместровой рейтинговой аттестации согласно «Положению о рейтинговой системе обучения ТвГУ» (протокол №8 от 30 апреля 2020 г.).

Если условия «Положения о рейтинговой системе ...» не выполнены, то зачет сдается согласно «Положению о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) обучающихся по программам высшего образования ТвГУ» (протокол №11 от 28 апреля 2021 г.)

1. Типовые контрольные задания для проверки уровня сформированности компетенции ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей

Этап формирования компетенции, в котором участвует дисциплина	Типовые контрольные задания для оценки знаний, умений, навыков	Показатели и критерии оценивания компетенции, шкала оценивания		
		Высокий уровень (3 балла по каждому критерию)	Средний уровень (2 балла по каждому критерию)	Низкий уровень (1 балл по каждому критерию)
начальный	Задания для проверки сформированности умений:			
	Доказать тождество Лагранжа	Может записать	Может записать	Может записать

	$[a \times b][c \times d] = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}$	<p>выражение для векторного и скалярного произведений . Уверенно использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения . Проводит расчеты.</p>	<p>выражение для векторного и скалярного произведений . Уверенно использует символы Леви-Чивита для записи векторного произведения . Проводит доказательств о с некоторыми недочетами.</p>	<p>выражение для векторного и скалярного произведений. Имеет представление о символах Леви-Чивита для записи векторного произведения. Проводит расчеты с ошибками.</p>
	<p>В некотором базисе тензор T типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ имеет координаты $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Метрический тензор имеет координаты $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти координаты тензоров (T^{ij}) и $(T_{i\bar{j}})$.</p>	<p>Способен записать связь между ко- и контра вариантными компонентам и. Использует данное в условии выражение для метрического тензора и проводит необходимые вычисления. Получает правильное решение.</p>	<p>Способен записать связь между ко- и контра вариантными компонентам и. Использует данное в условии выражение для метрического тензора и проводит необходимые вычисления. Получает правильное решение с некоторыми недочетами.</p>	<p>Способен записать связь между ко- и контра вариантными компонентами. Использует данное в условии выражение для метрического тензора и проводит необходимые вычисления с недочетами. Получает неверный ответ.</p>
	<p>Задания для проверки сформированности знаний:</p>	<p>Высокий уровень (3 балла по каждому критерию)</p>	<p>Средний уровень (2 балла по каждому критерию)</p>	<p>Низкий уровень (1 балл по каждому критерию)</p>
	<p>Сформулируйте и запишите математическую формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Привести пример из физики.</p>	<p>Знает формулировку теоремы Остроградского-Гаусса. Записывает ее. Понимает</p>	<p>Записывает математическое выражение для теоремы Остроградского-Гаусса. Путается в</p>	<p>Записывает математическое выражение для теоремы Остроградского-Гаусса. Не знает о</p>

		физическое содержание.	формулировке и физическом содержании.	физическом (смысловом) содержании. Путается в формулировке.
	Дайте определение дивергенции векторного поля и запишите выражение в случае произвольной (но допустимой) криволинейной системе координат.	Знает и правильно записывает выражение для дивергенции в общем случае.	Знает и правильно записывает выражение для дивергенции только в частном случае декартовой системы координат.	С недочетами формулирует определение дивергенции. Знает только запись в декартовых координатах.

V. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) Основная литература:

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=105572&sr=1>
2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005, 584 с. - Электронный ресурс. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=61810&sr=1>
3. Горлач, Б. А. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учебное пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 160 с. — ISBN 978-5-8114-1834-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168731> – Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) Дополнительные источники:

1. Келлер И.Э. Тензорное исчисление. СПб: «Лань», 2021. 176 с. Электронный ресурс.-Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/3814/>
2. Вильчевская, Е. Н. Тензорная алгебра и тезорный анализ : учебное пособие / Е. Н. Вильчевская. — Санкт-Петербург : СПбГПУ, 2019. – 124 с. – ISBN 978-5-7422-6705-8. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/171743> – Режим доступа: для авториз. пользователей.

VI. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Научная библиотека ТвГУ: <http://library.tversu.ru/>
2. Электронная библиотека издательства Лань: <http://e.lanbook.com/>
3. Университетская библиотека ONLINE: <http://www.biblioclub.ru/>
4. Сайт издательского дома ЮРАЙТ: <http://www.biblio-online.ru/>

VII. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

– методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов.

1. Изучить рекомендуемую литературу.
2. Просмотреть задачи, разобранные на аудиторных занятиях.
3. Разобрать задачи, рекомендованные преподавателем для самостоятельного решения, используя, при необходимости, примеры решения аналогичных задач.
4. Обсудить проблемы, возникшие при решении задач или освоении теоретического материала с преподавателем.

– примеры вопросов и задач к зачету:

1. Дайте определение вектору, 1- форме и тензору.
2. Скалярное, векторное и тензорное произведение векторов.
3. Градиент скалярной функции. Примеры из физики.
4. Ротор векторного поля. Примеры из курса физики.
5. Дивергенция векторного поля. Примеры из курса физики.
6. Лапласиан скалярной функции. Примеры из курса физики.
7. Криволинейные координаты. Символы Кристоффеля.
8. Дифференциальная форма и поливектор.
9. Внешняя производная.
10. Оператор Ходжа.
11. Обобщенная теорема Стокса. Ее частные случаи.
12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3,2,1)$ в направлении наискорейшего роста функции $f(\mathbf{r}) = \exp(-|\mathbf{r}|^2)$.
13. Записать в векторном виде следующее выражение: $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}a_k b_m c_n a_i$.
14. Используя символы Леви-Чивита, доказать тождество
$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

15. Найти ротор и дивергенцию вектора $A = [a \times (\varphi(r)\mathbf{r})]$, где a – постоянный вектор.

16. Доказать тождество $\int_V L(\nabla) dV = \int_S L(\mathbf{n}) dS$, где L – линейный оператор, ∇ – оператор Гамильтона.

17. Используя оператор Гамильтона ∇ , доказать тождество $\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 - [\mathbf{v}, \text{rot}\mathbf{v}]$.

18. Докажите тождество $\int_V \varphi d\psi = \int_S [\text{grad}\varphi \times \text{grad}\psi] dS$.

19. Найти лапласиан скалярного поля, заданного в сферических координатах $f = \frac{c}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$

20. Убедиться, что векторное поле является потенциальными и найти его потенциал

$$\mathbf{a} = \rho\mathbf{e}_\rho + \frac{\varphi}{\rho}\mathbf{e}_\varphi + z\mathbf{e}_z$$

21. Вычислить значение тензора $T = \omega \otimes u$, где $\omega = e^1 + e^2$, $u = e^1 - e^2$ на векторах $X = 5e_1$ и $Y = 4e_1 + 2e_2$.

22. Найти внешнее произведение дифференциальных форм $dx + 2dy$ и $x^2 dy \wedge dz + dz \wedge dx$

23. Доказать, что след тензора с компонентами $T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{lm} F_{il} F_{km} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right)$ в пространстве Минковского с метрикой $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ равен нулю, где (F_{ij}) – антисимметричный тензор.

24. Показать, что $\Gamma_{ik}^i = \partial_k \ln \sqrt{g}$, где $g = \det(g_{ij})$.

25. Пусть дан вектор напряженности магнитного поля $H = (H_x, H_y, H_z)$. Найти компоненты объекта $*H$, где $*$ – оператор двойственности Ходжа.

26. Вычислить внешний дифференциал формы $\omega = x^2 dx + xy^3 dy$

27. Показать, что для симметричного тензора второго ранга справедливо равенство $\nabla_i T_j^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} T_j^i) - \frac{1}{2} T^{kl} \partial_j g_{kl}$.

– примеры расчетно-графических работ:

1. Системы криволинейных координат.
2. Тороидальная система координат. Лапласиан скалярной функции.
3. Трёхмерные параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
4. Эллипсоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.

5. Параболоидальные координаты. Лапласиан скалярной функции.
6. Бицилиндрические координаты. Лапласиан скалярной функции.
7. Биполярные координаты. Лапласиан скалярной функции.
8. Параболические координаты. Лапласиан скалярной функции.
9. Конические координаты. Лапласиан скалярной функции.
10. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
11. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
12. Тороидальная система координат. Градиент скалярной функции.
13. Трёхмерные параболические координаты. Градиент скалярной функции.
14. Эллипсоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
15. Параболоидальные координаты. Градиент скалярной функции.
16. Бицилиндрические координаты. Градиент скалярной функции.
17. Биполярные координаты. Градиент скалярной функции.
18. Параболические координаты. Градиент скалярной функции.
19. Конические координаты. Градиент скалярной функции.
20. Координаты эллиптического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.
21. Координаты параболического цилиндра. Лапласиан скалярной функции.

VIII. Перечень педагогических и информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (по необходимости)

1. мультимедийной техникой. DLP проектор для демонстрации презентаций и учебных фильмов,
2. доступ к сети Интернет

IX. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Наименование специальных* помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Лекционная аудитория № 227 (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Проектор Panasonic PT-VW340ZE с проекционным экраном 2. Ноутбук (переносной) 3. Комплект учебной мебели на 60 посадочных мест	Adobe Acrobat Reader DC – бесплатно Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Google Chrome – бесплатно

		MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017
Учебная аудитория № 218 (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Комплект учебной мебели на 25 посадочных мест. 2. Экран настенный 153x203 3. Переносной комплект мультимедийной техники.	Adobe Acrobat Reader DC – бесплатно Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Google Chrome – бесплатно MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

Помещения для самостоятельной работы:

Наименование помещений	Оснащенность помещений для самостоятельной работы	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
Помещение для самостоятельной работы, учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, практики, Компьютерный класс физико-технического факультета. Компьютерная лаборатория робототехнических систем №4а (170002 Тверская обл., г. Тверь, Садовый пер., д. 35)	1. Компьютер RAMEC STORM C2D 4600/160Gb/ 256mB/DVD-RW +Монитор LG TFT 17" L1753S-SF – 12 шт 2. Мультимедийный комплект учебного класса (вариант № 2) Проектор Casio XJ-M140, настенный проекц. экран Lumien 180*180. ноутбук Dell N4050. сумка 15,6", мышь 3. Коммутатор D-Link 10/100/1000mbps 16-port DGS-1016D 4. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО 5. Видеокамера IP-FALCON EYE FE-IPC-BL200P, ОнЛайн Трейд ООО 6. Демонстрационное оборудование комплект «LegoMidstormsEV3» 7. Комплект учебной мебели	Adobe Acrobat Reader DC - бесплатно Cadence SPB/OrCAD 16.6 - Государственный контракт на поставку лицензионных программных продуктов 103 - ГК/09 от 15.06.2009 Google Chrome - бесплатно Java SE Development Kit 8 Update 45 (64-bit) - бесплатно Kaspersky Endpoint Security 10 для Windows – Акт на передачу прав №2129 от 25 октября 2016 г. Lazarus 1.4.0 - бесплатно Lego MINDSTORM EV3 - бесплатно Mathcad 15 M010 - Акт предоставления прав IC00000027 от 16.09.2011 MATLAB R2012b - Акт предоставления прав № Us000311 от 25.09.2012 Microsoft Express Studio 4 - бесплатно MiKTeX 2.9 - бесплатно MPICH 64-bit – бесплатно MSXML 4.0 SP2 Parser and SDK - бесплатно Microsoft Windows 10 Enterprise - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017 MS Office 365 pro plus - Акт приема-передачи № 369 от 21 июля 2017

Х. Сведения об обновлении рабочей программы дисциплины

№ п.п.	Обновленный раздел рабочей программы дисциплины (модуля)	Описание внесенных изменений	Дата и протокол заседания, утвердившего изменения
1	Раздел IV	Скорректирован фонд оценочных средств для проверки уровня сформированности закрепленных за дисциплиной компетенций	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г
2	Раздел IV	Скорректированы задания для промежуточной аттестации в соответствии с обновленным «Положением о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) студентов ТвГУ»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г.
3	Раздел V	Обновлен перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г
4	Раздел IX	Оснащенность аудиторного фонда для проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентов согласно «Справки МТО ООП ...»	Протокол Совета ФТФ №5 от 31 октября 2017 г
5	Раздел IV	Скорректирован фонд оценочных средств для проверки уровня сформированности закрепленных за дисциплиной компетенций	Протокол Совета ФТФ № 6 от 15.01.2019 г.
6	Раздел IV	Внесены изменения в соответствии с «Положением о промежуточной аттестации (экзаменах и зачетах) обучающихся по программам высшего образования ТвГУ»	Протокол Совета ФТФ № 10 от 19.05.2020 г.
7	Раздел IV	Внесены изменения в соответствии с «Положением о рейтинговой системе обучения в ТвГУ»	Протокол Совета ФТФ № 10 от 19.05.2020 г.
8	Раздел IX	Актуализированы данные на основе Справки МТО ООП 03.03.02 Физика	Протокол Совета ФТФ №14 от 03.07.2021

9	Раздел V	Обновлен перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	Протокол Совета ФТФ №14 от 03.07.2021
---	----------	---	---------------------------------------